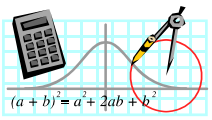
第五章　　示例

示例一　　算术中项 ≥ 几何中项

示例二　　平面面积

示例三　　二项式定理



示例一：

算术中项 ≥ 几何中项

目标： 证明「算术中项 ≥ 几何中项」（不需使用反向归纳法）

预备知识： (1) 数学归纳法原理
(2) 证明绝对不等式的基本技巧

活动内容：

假设 $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 及 $G_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 n 个正数。根据《中学课程纲要纯粹数学科（高级程度）1992》，若有需要，教师可利用反向归纳法证明算术中项 ≥ 几何中项。然而，「反向归纳法」已在本课程中删去。以下是证明此不等式的一些其它方法：

<u>方法一</u>

$A_1 = G_1$ 及 $A_2 \geq G_2$ 明显成立。

假设 $A_k \geq G_k$ 是真确的，其中 k 是一个大于或等于 2 的正整数。

当 $n = k+1$，

情况(i) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$，则 $A_{k+1} = G_{k+1}$ 明显成立；

情况(ii) 若 $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ 不是尽皆相等，在不失一般性的情况下，可假设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k+1}$ 及 $a_1 < a_{k+1}$.

可得出 $\dfrac{a_1}{G_{k+1}} < 1$ 及 $\dfrac{a_{k+1}}{G_{k+1}} > 1$.

假设 $y = a_1 a_{k+1}$。因为 $A_k \geq G_k$，可得出

$$\frac{y}{(G_{k+1})^2} + \frac{a_2}{G_{k+1}} + \cdots + \frac{a_k}{G_{k+1}} \geq k \sqrt[k]{\frac{y}{(G_{k+1})^2} \cdot \frac{a_2}{G_{k+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_k}{G_{k+1}}} = k \sqrt[k]{\frac{a_1 a_{k+1} a_2 \ldots a_k}{(G_{k+1})^{k+1}}} = k$$

在不等式左右两方同时加上 $\dfrac{a_1}{G_{k+1}} + \dfrac{a_{k+1}}{G_{k+1}} - \dfrac{y}{(G_{k+1})^2}$，可得出

$$\frac{a_1}{G_{k+1}}+\frac{a_2}{G_{k+1}}+\cdots+\frac{a_k}{G_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}\geq k+\frac{a_1}{G_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}-\frac{y}{(G_{k+1})^2}$$

$$=k+1+\frac{a_1}{G_{k+1}}-1+\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}-\frac{a_1a_{k+1}}{G_{k+1}}\cdot\frac{1}{G_{k+1}}$$

$$=k+1+\left(1-\frac{a_1}{G_{k+1}}\right)\left(\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}-1\right)$$

$\because$ $\frac{a_1}{G_{k+1}}<1$，$\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}>1$， $\therefore$ $\left(1-\frac{a_1}{G_{k+1}}\right)\left(\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}-1\right)>0$.

因此，我们可得出 $\frac{a_1}{G_{k+1}}+\frac{a_2}{G_{k+1}}+\cdots+\frac{a_k}{G_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}>k+1$.

$\therefore$ $A_{k+1}>G_{k+1}$ 成立。

合并情况(i)及(ii)的结果，可得出 $A_{k+1}\geq G_{k+1}$.

根据数学归纳法原理，可知对所有自然数 n，$A_n\geq G_n$ 皆成立。

<u>方法二</u>

$A_1=G_1$ 及 $A_2\geq G_2$ 明显成立。

假设 $A_k\geq G_k$ 是真确的，其中 k 是一个大于或等于 2 的正整数。

假设 $\underbrace{A_{k+1}, A_{k+1}, \ldots, A_{k+1}}_{(k-1)\text{項}}$ 和 a_{k+1} 的几何中项及算术中项分别为 M 及 L，

则 $M=(a_{k+1}A_{k+1}{}^{k-1})^{\frac{1}{k}}$ 及 $L=\frac{1}{k}\left[a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}\right]$.

利用归纳法的假设 $M\leq L$，可得出

$$\left(G_{k+1}{}^{k+1}A_{k+1}{}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}}=\left(a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}{}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}}=\left[\left(a_1a_2\cdots a_k\right)^{\frac{1}{k}}\left(a_{k+1}A_{k+1}{}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(G_kM\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(G_k+M\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(A_k+L\right)\quad(\text{由于 } G_k\leq A_k \text{ 和 } M\leq L)$$

$$=\frac{1}{2}\{A_k+\frac{1}{k}\left[a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}\right]\}$$

$$=\frac{1}{2k}\{a_{k+1}+kA_k+(k-1)A_{k+1}\}.$$

$$= \frac{1}{2k}\{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}\}$$

$$= A_{k+1}$$

即 $(G_{k+1})^{k+1}(A_{k+1})^{k-1} \le (A_{k+1})^{2k}$

$\therefore G_{k+1} \le A_{k+1}$ 成立。

根据数学归纳法原理，可知对所有自然数 n，$A_n \ge G_n$ 皆成立。

<u>方法三</u>

$A_1 = G_1$ 及 $A_2 \ge G_2$ 明显成立。

假设 $A_k \ge G_k$ 是真确的，其中 k 是一个大于或等于 2 的正整数。

当 $n = k+1$,

情况(i) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$，则 $A_{k+1} = G_{k+1}$ 明显成立；

情况(ii) 若 $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ 不是尽皆相等，在不失一般性的情况下，可假设

$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{k+1}$ 及 $a_1 < a_{k+1}$.

因为 $A_k \ge G_k$，可得出

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + a_{k+1}$$

$$= \left(k\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}}{(a_{k+1})^{k+1}}} + 1\right) a_{k+1}$$

$$= (kr^{k+1} + 1)\, a_{k+1}$$

其中 $r^{k(k+1)} = \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{(a_{k+1})^{k+1}}$ 及 $r^{k(k+1)} < 1$ 并且 $r > 0$.

因为 $0 < r^{k(k+1)} < 1$，则 $0 < r < 1$ 及 $r^k < r^{k-1} < r^{k-2} < \ldots\ldots < r^3 < r^2 < r$.

因为 $\dfrac{1-r^{k+1}}{1-r} = 1 + r + \ldots + r^k > \underbrace{r^k + r^k + \ldots + r^k}_{(k+1)\text{項}} = (k+1)r^k$，

$\therefore \quad 1-r^{k+1} > (k+1)r^k(1-r)$.

从而，我们可得出 $1-r^{k+1}+(k+1)r^{k+1} > (k+1)r^k$ 。

$\therefore \quad kr^{k+1}+1 > (k+1)r^k$

因为 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq (kr^{k+1}+1)\,a_{k+1}$

$$\therefore \; a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} > (k+1)r^k a_{k+1}$$

$$= (k+1)\sqrt[k+1]{\frac{a_1a_2\cdots a_{k+1}}{(a_{k+1})^{k+1}}}\,a_{k+1}$$

$$= (k+1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}$$

$\therefore \quad A_{k+1} > G_{k+1}$ 成立。

合并情况(i)及(ii)的结果，可得出 $A_{k+1} \geq G_{k+1}$.

根据数学归纳法原理，可知对所有自然数 n，$A_n \geq G_n$ 皆成立。

方法四

$A_1 = G_1$ 及 $A_2 \geq G_2$ 明显成立。

假设 $A_k \geq G_k$ 是真确的，其中 k 是一个大于或等于 2 的正整数。

当 $n = k+1$,

情况(i) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$，则 $A_{k+1} = G_{k+1}$ 明显成立；

情况(ii)若 $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ 不是尽皆相等，在不失一般性的情况下，可假设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k+1}$ 及 $a_1 < a_{k+1}$.

由此可推得 $a_{k+1} > \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} = G_k$，即 $a_{k+1} - G_k > 0$。

利用归纳法的假设，

$$
\begin{aligned}
A_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}\right) \\
&= \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1} \\
&\geq \frac{kG_k + a_{k+1}}{k+1} \\
&= G_k + \frac{a_{k+1} - G_k}{k+1}
\end{aligned}
$$

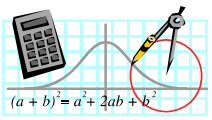
利用二项式定理，可得出

$$
\begin{aligned}
(A_{k+1})^{k+1} &\geq \left(G_k + \frac{a_{k+1} - G_k}{k+1}\right)^{k+1} \\
&= (G_k)^{k+1} + (k+1)(G_k)^k \left(\frac{a_{k+1} - G_k}{k+1}\right) + \cdots \qquad \text{（所有项皆为正数）} \\
&> (G_k)^{k+1} + (G_k)^k \left(a_{k+1} - G_k\right) \\
&= (G_k)^k a_{k+1} \\
&= (G_{k+1})^{k+1}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $A_{k+1} > G_{k+1}$ 成立。

合并情况(i)及(ii)的结果，可得出 $A_{k+1} \geq G_{k+1}$.

根据数学归纳法原理，可知对所有自然数 n，$A_n \geq G_n$ 皆成立。



示例二：

平面面积

目标： 证明参数方程 $x=x(t), y=y(t)$表示的曲线及直线 OA、OB 所包围的面积是 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$ ……(*)

其中t_0 及 t_1分别为曲线上A点和B点的参数。

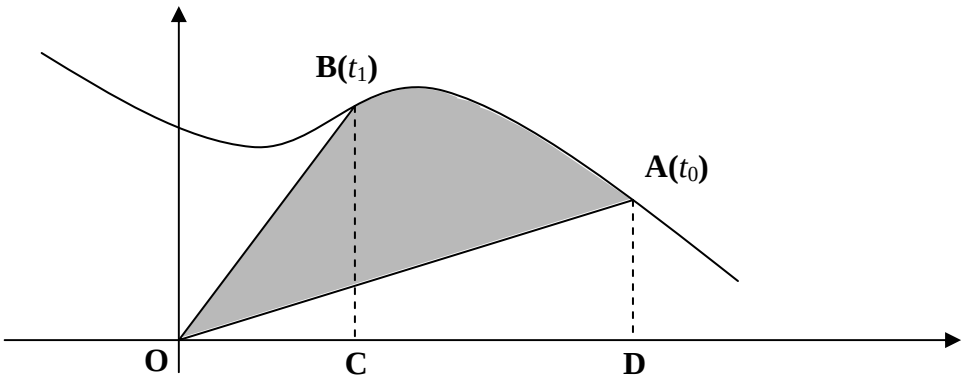
预备知识： (1) 应用定积分在笛卡儿坐标系中找出曲线下的面积

(2) 积分基本定理

活动内容：

部份教师习惯利用极坐标系统的方法去证明上述公式(*)。当曲线以极方程 $r=f(\theta)$表示，则曲线与两条半径$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$所包围的面积为$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,\mathrm{d}\theta$。

公式(*)可由$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,\mathrm{d}\theta$ 容易导出。有关极坐标系统的内容已从本课程删除。下面提出一个(*) 的证明方法供教师参考：



上图是一条以参数方程$x=x(t), y=y(t)$ 表示的曲线。t_0 及 t_1 分别为曲线上A点和B点的参数。在不失一般性的情况下，可假设当t值增加时，曲线是连续及以逆时针方向变化的。

有阴影部分的面积 = ΔBOC 的面积 + ABCD 的面积 − ΔAOD 的面积

$$= \frac{x(t_1)\,y(t_1)}{2} + \int_{t=t_1}^{t=t_0} y\,\mathrm{d}x - \frac{x(t_0)\,y(t_0)}{2}$$

$$= \frac{x(t_1)\,y(t_1)}{2} + \int_{t_1}^{t_0} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x(t_0)\,y(t_0)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[\,x(t_1)\,y(t_1) - x(t_0)\,y(t_0)] - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$$

利用积分的第二基本定理（见附录二第 67 页）

可得出 $x(t_1)\,y(t_1) - x(t_0)\,y(t_0) = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \mathrm{d}[x(t)\,y(t)]$.

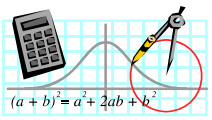
因此，有阴影部分的面积 $= \frac{1}{2}\int_{t=t_0}^{t=t_1} \mathrm{d}\,[x(t)\,y(t)] - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x(t)\,y'(t) + x'(t)\,y(t)]\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]\,\mathrm{d}t$$

参数方程 $x=x(t)$、$y=y(t)$、直线 OA 及 OB 所包围的面积是 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]\,\mathrm{d}t$.



示例三：

二项式定理

目标： 证明正整指数的二项式定理

预备知识： 实系数多项式方程的根与其系数的关系

活动内容：

大部份教师会应用数学归纳法原理去证明正整指数的二项式定理。以下是另下一个方法去证明，对任意正整数 n，

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + C_r^n a^{n-r} b^r + \ldots\ldots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n .$$

假设 $(x+b)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$，其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ 皆为实数，

因为方程 $(x+b)^n = 0$ 有 n 个重根 $x = -b$，

方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ 有 n 个根 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 并

且 $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n = -b$.

利用实系数多项式方程的根与其系数的关系，可得出

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots\ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots\ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_1 x_2 \ldots x_k + x_1 x_2 \ldots x_{k+1} + \ldots\ldots + x_{n-k+1} x_{n-k+2} \ldots x_n = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

在上面第k条等式中，左方每一项都是k个x_i相乘。

因为 $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n = -b$，

$\therefore \quad (-b)^k C_k^n = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.

因为 a_n 是二项式 $(x+b)^n$展开后x_n 的系数，可知 $a_n=1$，

$\therefore \quad a_{n-k} = C_k^n b^k \quad (k=1, 2, \ldots\ldots, n)$.

换句话说，$a_n = 1 = C_0^n$，$a_{n-1} = C_1^n b$，……，$a_{n-k} = C_k^n b^k$，……，$a_0 = C_n^n b^n$

$$\therefore \quad (x+b)^n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$$

$$= C_0^n x^n + C_1^n b x^{n-1} + C_2^n b^2 x^{n-2} + ... + C_{n-k}^n b^{n-k} x^k + ... + C_{n-1}^n b^{n-1} x + C_n^n b^n .$$

以 $x=a$ 代入，可得出

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n b a^{n-1} + C_2^n b^2 a^{n-2} + ... + C_{n-k}^n b^{n-k} a^k + ... + C_{n-1}^n b^{n-1} a + C_n^n b^n$$

$$= C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + ... + C_{n-k}^n a^k b^{n-k} + ... + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n .$$

这是空白页