纯粹数学科课程及评估指引(高级程度)
与
中学课程纲要–纯粹数学科(高级程度)1992
内容对照

本纯粹数学科课程及评估指引(高级程度)是由一九九二年编订之中学课程纲要纯粹数学科(高级程度)修订而成，主要是删除或减少其中一些课题。为方便教师参考，这些课题以 ▭ 方格覆盖。说明及备注则列于 ▭ 方格内，让教师较易掌握教学的内容和深度。

3. 课　程

单元 A1：数学语言

特定目标：

(1) 理解基本的集合语言。

(2) 理解基本逻辑。

内容	时间分配	教学建议
1.1 集合语言	5	有关本节需要引入的基本术语包括集、元素、子集、母集、幂集、空集、等集、不相交的集、全集、交集、并集、余集和积集等。在引入上列的概念时，手法毋须过于严谨，惟教师宜于施教时能广泛采用多样化的简单而实质的生活化例子来支持教学。有关的常用符号和记号亦应加以说明。以下是一些参考数据： (1) 一般来说，集是用大字母来代表的而小字母则代表元素。以下是一些常用的数集及其代表符号： 自然数集 N 整数集 Z；I 有理数集 Q 实数集 R 复数集 C (2) 集通常可用表列式 (即表列其所有元素) 如 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 或命题式 $\{x: p(x)\}$ 如 $A = \{x: x \le 10$，x 为正偶数$\}$ 来表达。 (3) 在讲解有关交集、并集和余集的课题时，教师可引入一些有关的简单而直接的运算法则和借助范氏图所提供的直观了解来说明一些概念如「交换的」、「结合的」和「分布的」等。
1.2 基本逻辑	5	在本节需要引入的基本术语包括语句 / 命题、真值、合取、析取、否定式、条件式和双条件式、等价句语、等价、蕴合式、量词、例及反例。至于透过运用真值表来阐释

11

▭ 表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
12		上列的连词是一可行的辨法，惟在讲解条件式和双条件式时，重点的说明宜置于「若且」及「若且仅若」的形态，务使学生能充份掌握这两种广泛出现于数学研习中的概念。在施教时，教师应提供足够的相关的生活化事例以助说明，而学生亦应能相对地提供例子以强化学习。整体来说，以课堂的讨论形式来引入这些概念的方法比透过纯理论的分析方法更为值得注重。 为着加强学生对于「充份条件」、「必要条件」和「充要条件」的认知，教师宜就下开所提供的两命题例子与学生作课堂的讨论和探索，从而了解何种条件适用于该等例句中： (1) x 和 y 均为整数；xy 为整数。 (2) x 和 y 均为偶数；$x + y$ 为偶数。 (3) x 和 y 均为偶数；$x + y$ 及 xy 均为偶数。 (4) 方程$ax^2 + bx + c = 0$ 有等根；$b^2 - 4ac = 0$ 再者，教师亦应将 $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$（逆反命题） 的意义运用上列的例句详加说明和演绎。同时亦可提供一些运用反证法(归谬法)的论证来作示范，以资巩固。其中证明 $\sqrt{2}$ 为无理数者尤为常用的例子。
	10	

单元 A2：函数

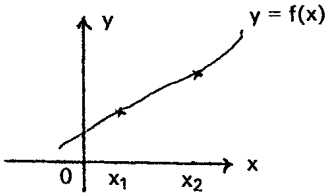
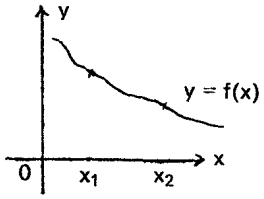
特定目标：

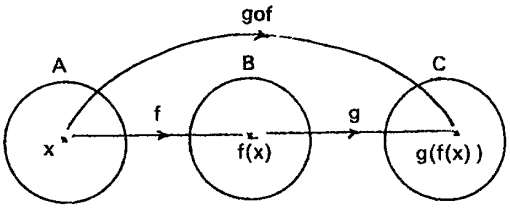
1. 将函数作为学习其它数学单元的基本工具。
2. 绘画及描述不同的函数。

内容	时间分配	教学建议
2.1 函数及其图像	2	应教导学生认识清楚函数的定义，但函数的严格定义可不需深究，并可采用下列方式来说明函数的定义： $f : A \to B$，f 为一由 A 至 B 的函数 假若 A 集中的每一元素均以某种方式匹配 B 集的唯一元素。A 集称为 f 的定义域，B 集称为 f 的值域。因函数 f 关系而对应于A集中元素 x 的 B集元素，通常用 f(x)表示，并称为 x 在函数 f 下的像。f[A]则称为 A 集在函数 f 下的像点集。在此，真值函数的意义须特别强调，因为它们在本课程的其它单元中有广泛使用，学生并须懂得如何绘画函数的图像。
2.2 函数的性质及运算	4	学生应该清楚知道内射、满射和对射函数的定义，并能将它们分辨和将它们应用于解答有关问题。教师可采用下列提供的方法： 函数 $f : A \to B$ 为 (i) 内射(一个对一个)若且仅若对集A中的元素a_1、a_2，$a_1 \neq a_2$蕴涵$f(a_1) \neq f(a_2)$，或者等价地，$f(a_1) = f(a_2)$ 蕴涵$a_1 = a_2$； (ii) 满射若且仅若 $f[A] = B$； (B 集之中的每一元素均为 A 集之中某一元素的像点。) (iii) 对射(一一对应)若且仅若 f 为一内射和满射函数。 此时，教师应该已替学生在反函数f^{-1}的定义做好了预备，并可以推论出下列性质： f为一对射函数若且仅若其反函数f^{-1}存在。 再者，函数与其反函数(如存在的话) 的图像仅为直线 $y = x$ 上的反射。这个性质应利用足够的例子来加以说明。

13

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
14		学生应懂得分辨奇函数、偶函数、周期函数、递增和递减函数。对于这些函数，应给予学生清楚的定义。至于递增和递减函数的定义，在未曾学习微分法之前，可采纳以下提供的定义： (i) f(x) 为一递增函数(严格递增)若且仅若$x_2 > x_1$蕴涵$f(x_2) \geq f(x_1)$ ($(f(x_2) > f(x_1))$)； (ii) f(x) 为一递减函数(严格递减)若且仅若$x_2 > x_1$蕴涵$f(x_2) \leq f(x_1)$ ($(f(x_2) < f(x_1))$)。  f(x) 是严格递增  f(x) 是严格递减 这些性质对绘画曲线和计算定积分均甚为有用。 对于函数的运算，教师应与学生讨论下列各点：设 f、g 为函数，则 $f+g$、$f-g$、$f \times g$ 及 f/g (在考虑范围下的所有 x，$g(x) \neq 0$) 均为函数。 至于复合函数，因为它们在微分学中对学习链式法则极为重要，故需要给予学生足够的例子，以便他们能够掌握复合函数的概念。教师可引用以下例子，并列举其它真值函数的例子作为解释。 若函数 $f : A \to B$ 及 $g : B \to C$ 则 f 与 g 的复合函数为 $g \circ f : A \to C$ 及对 A 集内所有元素 x， $g \circ f(x) = g(f(x))$ 。

内容	时间分配	教学建议
15		
2.3 代数函数	2	学生应对下列的代数函数有所认识： (*a*) 多项式函数； (*b*) 有理函数 ； (*c*) 幂函数x^{α}，其中α 为有理数； (*d*) 由上述各函数的加、减、乘、除和复合而成的其它代数函数、例如$\sqrt{x^2+1}$ 。
2.4 三角函数及其公式	14	学生应懂得绘画六个三角函数及其反函数的图像。下列有关三角函数的基本关系应与学生详细讨论： $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\cot^2\theta + 1 = \mathrm{cosec}^2\theta$ 学生并应懂得三角函数在 $(\frac{n\pi}{2} \pm \theta)$时的化简 (当 n 为奇数或偶数)。其余有关的应用和公式亦应一并教授。 (1) 复角公式 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
16		(2) 倍角公式 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $= 2\cos^2 A - 1$ $= 1 - 2\sin^2 A$ $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$ (3) 半角公式 $\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(1-\cos A)$ $\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\cos A)$ $\sin A = \dfrac{2t}{1+t^2}$； $\cos A = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 其中 $t \equiv \tan\dfrac{A}{2}$ (4) 和及积公式 $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

内容	时间分配	教学建议
17 **2.5 指数函数及对数函数**	6	$\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$ $\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$ $\cos A\sin B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B)-\sin(A-B))$ $\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$ $\sin A\sin B = \dfrac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$ 其实；大部份公式均为基本定义的引申，故此教师应鼓励学生将它们证明出来，并讨论将数式 a cos x + b sin x 转变为 r sin(x+α) 或 r cos(x+β)的方法。将上述各个公式应用在恒等式的证明和计算三角方程式的解亦应包括在课程内。 学生应对指数函数和对数函数之间互为反函数的关系有所认识。对数的定义需加以温习： $\log_a x = y$ 若且仅若 $x = a^y$ 其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$。 对于包含有变量 x 的对数函数，学生应知道它们其实祇是 logx 或函数 f(x)的对数函数而已。例如：$(\log_{10} x)^2$ 和 $\log_e(1+\tan x)$ 等。 对数函数的一些特性应加以学习。 设 $f(x) = \log_a x$，其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$； (i) f(x) 只在 $x > 0$ 上能够定义； (ii) 当 $a > 1$ 时，f(x)是一递增函数，而当 $0 < a < 1$ 时，f(x)是一递减函数； (iii) 当 b、$c > 0$ 及 $b \neq 1$， $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$； (iv) $f(a) = \log_a a = 1$； (v) $f(1) = \log_a 1 = 0$ 。

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
18		对于指数函数，应教导学生相应的处理方法。设a为一正常数和x为一变量，则函数a^x为一指数函数。其特性为： 设$f(x) = a^x$ 其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$， (i) f(x) 对所有实数均可定义； (ii) 当 $a > 1$ 时，f(x)为递增函数而当 $0 < a < 1$，f(x)则为递减函数； (iii) $f(0) = a^0 = 1$。 学生应懂得绘画下列图像： (i) 对数函数 $f(x) = \log_a x$ 当 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ (ii) 指数函数 当 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 在此时，教师可引领学生去扩阔他们在对数函数和指数函数的认识。 (i) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (ii) $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ 和 (iii) $\log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ 。 〔请注意 (iii) 仅为对数函数的另一定义而已， $\log_e x$ 可写为 $\ell n\, x$ 〕 对数函数和指数函数的性质应予讨论。 对数函数 $f(x) = \log_a x$ 其中 $a > 0$， $a \neq 1$， (i) $f(x) + f(y) = f(xy)$ (ii) $f(x) - f(y) = f(\frac{x}{y})$ (iii) $f(x^n) = nf(x)$

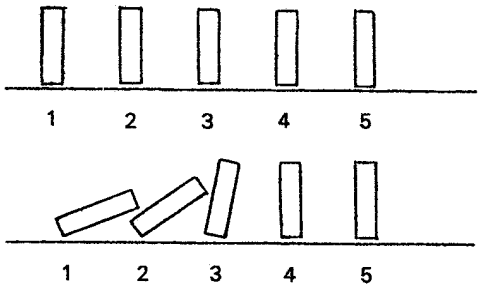
内容	时间分配	教学建议
19		指数函数 $g(x) = a^x$ 其中 $a > 0$ (i) $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ (ii) $g(x - y) = \frac{g(x)}{g(y)}$ (iii) $g(nx) = (g(x))^n$ 至于函数 e^x 和 $\ell n\, x$ 在学习数学时的重要性应加以指出。
	28	

表示删去的内容

单元 A3：数学归纳法

特定目标：

1. 理解数学归纳法原理。
2. 运用数学归纳法原理证明有关正整数的命题。
3. 能修改数学归纳法原理以适合不同的需要。

内容	时间分配	教学建议
3.1 数学归纳法原理及其应用	6	作为一简单介绍，教师可要求学生考虑 $1 = 1$ $1 + 3 = 4$ $1 + 3 + 5 = 9$ …… …… 去推测首n个奇正整数之和的公式。建立了命题 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$之后，学生在引导下应能理解到若仅验证了有限次，他们还不能肯定此命题的一般正确性。教师可随即示范利用数学归纳法去证明上述命题。 教师宜明确地将数学归纳法原理写在黑板上，并可利用骨牌游戏去帮助解释其原理： 

内容	时间分配	教学建议
3.2 数学归纳法原理的其它常见形式及 其应用 不包括 反向归纳法	~~6~~ 5 ~~12~~ 11	教师应举不同例子示范数学归纳法之应用，例子宜包括级数和、整除性及一些不等式的证明。数学归纳法原理在不同情况下有不同的变更。教师可用例子说明去证明命题一定要同时满足数学归纳法的两个条件，缺一不可。其它应用包括证明： (i) 正整指数的二项式定理 (ii) 棣美弗定理，其中 n 为正整数 (iii) 一些和行列式及方阵有关的命题 (iv) 莱布尼兹定理及一些和 n 阶导数有关的命题 作为较深入的研究，教师可以和学生讨论一些需要用归纳法的其它形式之情况。 *例*: $x^n + y^n$ 可被 $x + y$ 整除，其中 n 为奇正整数。 *例*: 斐波那契序列定义如下： $a_0 = 0$， $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$，其中 n 为自然数。 证明 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。 教师应指出有必要修改数学归纳法原理才能证明上述两例子。教师宜讨论一些以递推公式定义的序列例子。

21

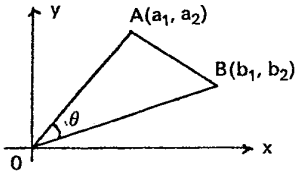
表示删去的内容

单元 A4：不等式

特定目标：

1. 学习不等式的基本性质。
2. 证明简单絕对不等式。
3. 解简单条件不等式。

内容	时间分配	教学建议
22		
4.1 絕对不等式	6	学生应能正确地运用符号 $a > b$ 及 $a \geq b$。教师应和学生温习不等式的基本性质，其中应包括 (i) 对一任意实数 x， $x^2 \geq 0$ (ii) 若 $a > b > 0$ 及 n 为一正整数，则 $a^n > b^n$ 及 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (iii) 若 $a > b > 0$ 及 $x > y > 0$，则 $ax > by$； 惟无须涉及这些基本性质之严谨证明。学生应能从这些基本性质推算出简单的絕对不等式。处理絕对不等式的证明，教师可强调以下的技巧： *例*: 证明 $E_1 \geq E_2$ 证： $E_1 - E_2 = ...$ $= .....$ $= .....$ ≥ 0 $\therefore E_1 \geq E_2$
4.2 **A.M. ≥ G.M.**	4	作为 A.M. ≥ G.M. 的初步认识，教师可提供最多至四个变量的证明，而不强调此定理的一般性证明。若有需要，教师可用反向归纳法去证明此定理。学生须要懂得如何运用此结果至 n 个变量。
4.3 柯西——许瓦尔兹不等式	3	学生应理解二次式 ax^2+bx+c 恒为正数的充要条件为 $a>0$ 及 $b^2-4ac<0$，并应能利用此结果去解如「若 $cx^2+4x+c+3$ 恒为正数，其中 x 为实数，求 c 之范围。」的问题。柯西——许瓦尔兹不等式可从上述结果证明。

内容	时间分配	教学建议
23		
		n = 2 的柯西——许瓦尔兹不等式的几何意义可从坐标平面得出。 $\cos\theta = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB}$ $= \dfrac{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right]}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ $= \dfrac{(a_1b_1 + a_2b_2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ $\cos^2\theta = \dfrac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$  因为 $\cos^2\theta \leq 1$， $\therefore (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ 学生应能应用此不等式去解有关的简单问题。
4.4 绦件不等式	7	学生宜温习实线上的区间概念。实数的絕对值的定义及性质应予讨论。学生应能解线性不等式、一元二次不等式及一元高次不等式。教师应和学生讨论含有絕对值的不等式解法，例如 $\lvert ax^2+bx+c \rvert \geq d$， $\lvert x-a \rvert + \lvert x-b \rvert \geq c$ 及 $(x-a)\lvert x-b \rvert \geq c$。 教师亦应对如 $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ 形式的不等式加以讨论，其中P(x)及Q(x)均为多项式。上述不等式的复合不等式亦应给予指导。
	20	

表示删去的内容

单元 A5：正整指数的二项式定理

特定目标：

1. 学习及应用正整指数的二项式定理。
2. 学习二项式定理系数的简单性质。

内容	时间分配	教学建议
5.1 正整指数的二项式定理	3	学生应学习如何求 n!及 C_r^n 的值。正整指数的二项式定理可用数学归纳法证明。涉及 C_r^n 符号的讨论只限于作为二项式定理系数之用。教师可指出帕斯卡三角形及二项式定理系数 C_r^n 的关系。学生并不须要学习一般二项式定理。
5.2 正整指数的二项式定理的应用	5	学生应能利用正整指数的二项式定理展开有关的数式。教师应指导学生如何求二项展式中某特殊项或某特殊项的系数。学生亦应能求出二项展式中的最大项和最大系数。近似值的应用亦可予以讨论。
5.3 二项式系数的简单性质	5	学生应知道 C_r^n 及 $\binom{n}{r}$ 均可用作二项式定理系数的符号。讨论宜包括二项式系数的简单性质及二项式系数的关系如 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n$； $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 及其它类似关系。 注：排列及组合可以用来引入二项式定理，但有关排列及组合的问题并不需要。学生学习微积分后，教师可引入涉及应用微分和积分的二项式系数问题。
	13	

24

单元 A6： 多项式及方程

特定目标：

1. 学习单变量的实系数多项式的性质。
2. 学习除法算式、余式定理和欧几里德算法与及它们的应用。
3. 分解有理函数为分项分式。
4. 学习单变量的实系数多项式方程的根的性质。

内容	时间分配	教学建议
6.1 单变量的实系数多项式	5	学生应学习单变量的实系数多项式的一般式和下列各项名称：非零多项式的次、首项系数、常数项、首一多项式、零多项式。 学生亦应学习两多项式的等式、和、差及积。 由定义可知，对非零多项式 f(x)、 g(x) deg {f(x) g(x)} = deg f(x) + deg g(x) 和deg {f(x) + g(x)} ≤ max {deg f(x)，deg g(x)}。 应定义两非零多项式的最高公因式 (G.C.D. 或 H.C.F.)。 学生应清楚除法算式和欧几里德算法的分别。由除法算式可证明余式定理，因学生在中学时已学习余式定理，固教师可给予较深的题目。欧几里德算法是求两多项式的最高公因式的一种方法，教师应给予学生练习一些求两多项式的最高公因式的题目。.
6.2 有理函数	4	应首先定义有理函数。学生可能初次接触分项分式，教师可引用一简单例子，如 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$。 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x+1}$ 称为分项分式。 教师应清楚说明分解真有理函数为分项分式的法则，并举例说明。应举例强调及说明，若一有理函数为假有理函数时，应先将它表为一多项式及真有理函数的和。

25

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
6.3 单变量的实系数多项式方程	6	学生应学习分项分式的应用。 *例*: 1. 表 $\frac{x^2-8x+9}{(x+1)(x-2)^3}$ 为分项分式。 2. 分解 $\frac{x^4}{(x-a)(x^2+a^2)}$ 为分项分式。 3. 计算 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ 的值。 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 与及它的根α、β，学生应熟悉下列关系： $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$， $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 。 对一般 n 次多项式方程， $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 或 $\sum_{k=0}^{n}a^kx^k=0$， 下列定理给出系数与根的关系： 若 α_1，α_2，…，α_n 为多项式方程$f(x)=0$ 的根，则一切可能的k个根α_j (k = 1，2，. . .，n) 的乘积的和S_k等于 $(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$， 即是，如 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ 则 $S_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ $S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$ $S_3=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

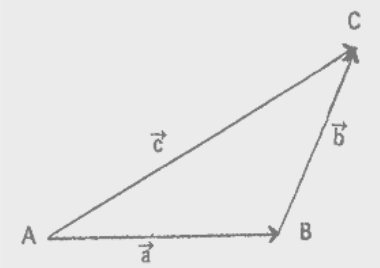
内容	时间分配	教学建议
		…… …… $S_n=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$ 。 学生应仔细学习下列性质： (i) 非零多项式的相异根的数目小于或等于多项式的次。 (ii) 若一个整数系数多项式方程的根为有理数 $\frac{p}{q}$，其 p 和 q 是互素的整数，则 p 整除多项式的常数项，而 q 整除多项式的首项系数。 (iii) 多重根的条件： $x=\alpha$ 是多项式方程 $f(x)=0$ 的多重根的充要条件是 $f(\alpha)=0$，且α是方程 $f'(x)=0$ 的根，其中 $f'(x)$是 $f(x)$的导数。 以下是较为一般的形式： 对于正整数 k，α是方程 $f(x)=0$ 的 k + 1 重数根当且仅当 $f(\alpha)=0$ ， 并且α为 $f'(x)=0$ 的 k 重数根。 和 α为方程 $f(x)=0$ 的 k+1 重数根当且仅当α为下列方程公根： $f(x)=0$， $f'(x)=0$， ⋮ $f^{(k)}(x)=0$ 但α 不是 $f^{(k+1)}(x)=0$ 的根。 注：以共轭偶出现的复数根会在单元 A10 复数中学习。
	15	

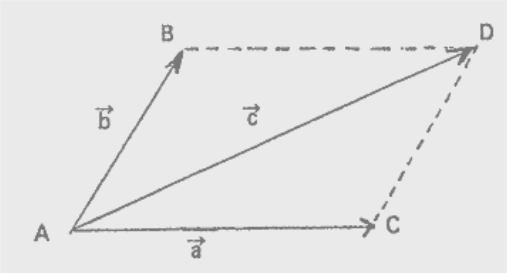
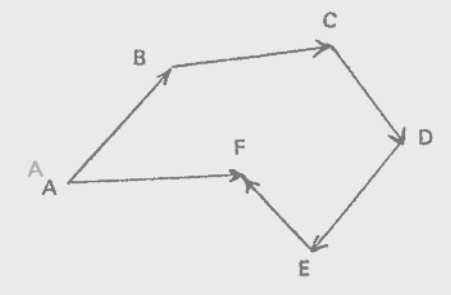
表示删去的内容

单元A7：R^2及R^3的向量

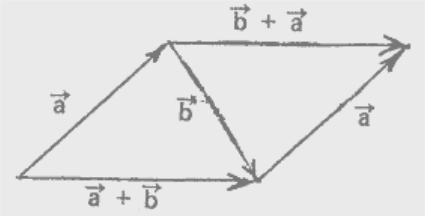
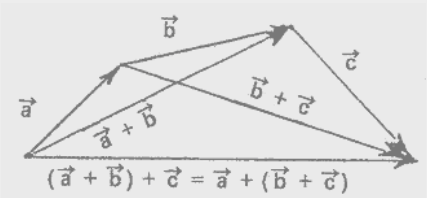
特定目标：

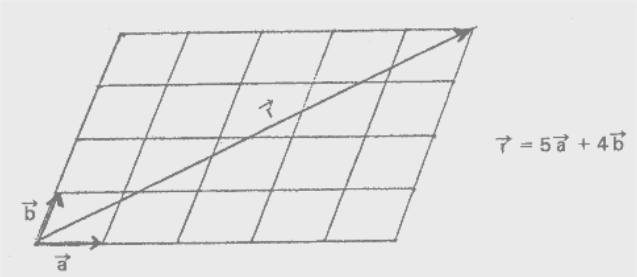
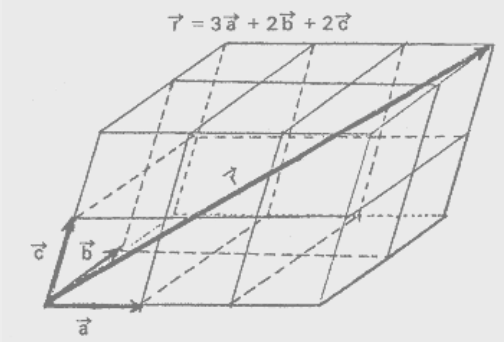
1.学习R^2及R^3的向量运算。
2.理解向量的线性相关及线性无关的概念。
3.向量在几何问题上的应用。

内容	时间分配	教学建议
7.1 向量及纯量的定义	1	教师应在此单元开始时对学生解释向量及纯量的分别和介绍表示向量的图解及写法。现行的向量记法（如 $\overrightarrow{AB}$ 、**AB**、 $\vec{a}$ 、**a**）及向量大小的记法（如 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ 、$\lvert\mathbf{AB}\rvert$、$\lvert\vec{a}\rvert$ 、$\lvert\mathbf{a}\rvert$）都应教授。下列各项 ： 零向量、单位向量、等向量、负向量、共线向量及共面向量亦应定义。
7.2 向量的运算	7	学生应认识向量加法定律〈即三角形定律、平行四边形定律及多边形定律〉，向量减法及纯量乘法。 (i) 三角形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 当使用此定律求 $\vec{a}+\vec{b}$ 时，教师须指出向量 $\vec{a}$ 的终点应与向量 $\vec{b}$ 的始点重叠。亦应让学生注意当 A、B 及 C 点共线时，此定律仍然适用。

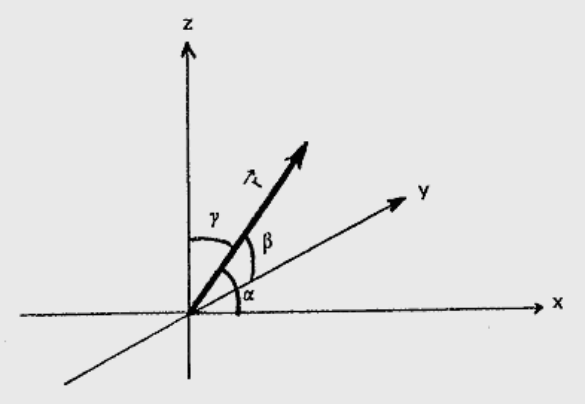
内容	时间分配	教学建议
		(ii) 平行四边形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 同样地，教师应提醒学生向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的始点应重叠，而在上两图中 $\vec{c}$ 可视为 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量和。三角形定律和平行四边形定律的等价性是值得讨论的。 (iii) 多边形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		向量代数定律如交换律、结合律和分配律应介绍给学生认识。下列各图有助解释各性质。 (a) 加法交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$  (b) 加法结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$  (c) 纯量乘法结合律： $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ 纯量乘法分配律： $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ 明白纯量乘法概念后，学生应不难得出： 若 $\vec{a}=\alpha\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 为非零向量而α为一些纯量，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是平行向量。

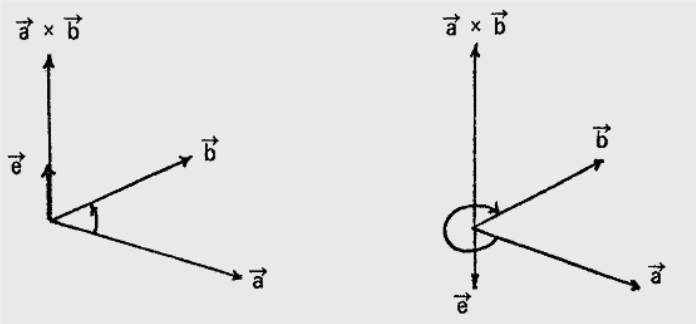
内容	时间分配	教学建议
		学生应清楚在$\mathbf{R}^2$及$\mathbf{R}^3$中将向量分解为分量及以分量和表示另一向量的方法。$\mathbf{R}^2$中的向量分解可以下列例子介绍。在第一个例子中，向量 $\vec{r}$ 分解为两个分别在方向 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量 $5\vec{a}$ 及 $4\vec{b}$，由此可推广至$\mathbf{R}^2$中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 为不共线向量和在$\mathbf{R}^3$中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，其中 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 为非共面向量和α、β及γ为纯量。 *例*: 1.  2.  再者，教师应和学生讨论以向量分量表向量的纯量乘法、加法及减法。

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
7.3 于直角坐标系中的向量分解	2	教师应详细解释 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 分别是在正x－轴、 y－轴及 z－轴的单位向量和在$\mathbf{R}^2$及$\mathbf{R}^3$中任一向量可用 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 表示。 学生须认识以 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 表示的向量的性质： (i) $\left\|a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (ii) 若 $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$， 则向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 与 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 平行。 再者，教师应用图解释向量 $\vec{r}$ 的方向比、方向余弦及方向角。下列性质亦应加以讨论。 (i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (ii) $\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ 。 

内容	时间分配	教学建议
7.4 向量的线性组合	4	教师应说明下列定义： (i) 若 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 为一个向量集，则 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}$，其中 λ_1，λ_2，λ_3，…，λ_n 为纯量，称为 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 的向量线性组合。若各纯量 λ 非全为零，则此线性组合称为非平凡，否则为平凡线性组合。 (ii) 若向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 存在一等于零的非平凡线性组合，则它们称为线性相关，即 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$ ，其中有部分 $\lambda_i\neq 0$，$i=1$，2，3，…，n。 (iii) 若向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 的唯一等于零的线性组合就是平凡线性组合，则它们称为线性无关，即若 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$，则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$ 。 教师应协助学生由(ii)得出一个实时结果，就是向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 为线性相关当且仅当其中一个向量是同组中其它向量的线性组合。 在$\mathbf{R}^2$ 及$\mathbf{R}^3$ 中线性相关向量的几何意义应加以说明。如 (i) 在$\mathbf{R}^2$ 中，向量 $\vec{r_1}$ 及 $\vec{r_2}$ 为线性相关当且仅当它们是平行向量； (ii) 在$\mathbf{R}^3$ 中，向量 $\vec{r_1}$、$\vec{r_2}$ 及 $\vec{r_3}$ 为线性相关当且仅当它们是共面向量。
7.5 纯量 (点) 积及向量 (叉) 积	6	两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的纯量积，写作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，定义为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$ ，其中 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之间的夹角。下列各性质应加以讨论： 1. 纯量积的交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2. 纯量积的分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2$ 4. 两非零的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为正交当且仅当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 5. $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
34		教师应特别指出由第 5 点用纯量积可求出以笛卡儿分量表示两向量的交角。教师应指导学生求证 $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$、$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ 等及 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$、$\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$、$\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$。 矢量积的定义须清楚介绍，教师亦应特别说明右手系统的正确方法。两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的矢量积，写作 $\vec{a}\times\vec{b}$，定义为 $\vec{a}\times\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta\,\vec{e}$，其中 (i) $\vec{e}$ 为垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的单位向量； (ii) θ 为由 $\vec{a}$ 量度至 $\vec{b}$ 的角度，而量度是根据右手法则来决定 $\vec{e}$ 的方向。  下列各性质有讨论的必要： (i) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ 及 $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$ (iii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ (iv) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

内容	时间分配	教学建议
35 **7.6 向量在几何的应用**	11	学生应自己求证 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$、$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ 等用来计算以笛卡儿分量表示两向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 及 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 的矢量积， $\vec{r_1}\times\vec{r_2}=(b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}+(c_1a_2-c_2a_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$ 或 $=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ 下列两个性质有助学生掌握矢量积的概念： (i) 两非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行当且仅当 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$； (ii) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ 可视为由向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所组成的平行四边形的面积。 教师应详细解释相对向量的用途，包括位置向量和位移向量。P 及 Q 两点对基准点 O 的位置向量通常分别以 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 或 $\vec{p}$、$\vec{q}$ 表示，而 $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ 亦应加以强调。 教师应导出下列结果而其它有关的推论亦值得讨论。 分点的位置向量： 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{p}$ 分别为 A、B 及 P 对基准点 O 的位置向量。若 P 以 m:n 的比分线段 AB，则 $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$。 内分点与外分点的处理方法应分别讨论。为准备学生学习通过A、B两点的直线的向量方程，建议采用公式 $\vec{p}=\dfrac{k\vec{a}+\vec{b}}{1+k}$。在笛卡儿坐标系中，若A为$(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$ 及$P(x, y, z)$，学生不难得到一直线的两点式 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$。

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
36		于此，学生应先学会写出向量 $\vec{b}-\vec{a}$ 的方向数，从而将两点式转为 (i) 对称式 $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 及 (ii) 参数式 $x=x_1+\ell$ $y=y_1+m$ $z=z_1+n$ 其中 $\ell:m:n$ 代表直线的方向数。 作为一个延续，通过点 (x_1, y_1, z_1) 而法线的方向比为 $\ell:m:n$ 的平面方程可作为纯量积的应用： $\ell(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$ 在此，平面方程的通式 $Ax+By+Cz+D=0$ 亦可介绍作为补充材料，并讨论下列各性质。 (i) 平面法线的方向比为 $A:B:C$。 (ii) 由点 $P(x', y', z')$到平面的垂直距离为 $\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，其中符号的选择在使整个表达式为正数。 (iii) 两平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的夹角θ可 由下式求得 $\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$。 (iv) $\pi_1 // \pi_2$ 当且仅当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$； $\pi_1 \perp \pi_2$ 当且仅当 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

内容	时间分配	教学建议
37	31	(v) 平分两个平面π_1及π_2的夹角的平面方程为 $\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$。 由线及平面的普通知识，教师可引导学生知道 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 代表两平面 π_1及π_2 (若不平行) 的相交线，而这直线的方向比为 $\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}$。 下列有关方向比为 $p:q:r$ 的直线 L 及平面π: $Ax+By+Cz+D=0$ 的性质应予讨论： (i) $L // \pi$ 当且仅当 $Ap+Bq+Cr=0$ (ii) $L \perp \pi$ 当且仅当 $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$ (iii) L 与 π 的夹角 θ 由下式得出 $\sin\theta=\left\lvert\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\right\rvert$ 两直线共面的条件亦应学习，即两直线共面当且仅当此两直线相交或平行。假若 L_1是 $\frac{x-a_1}{p_1}=\frac{y-b_1}{q_1}=\frac{z-c_1}{r_1}$ 及 L_2是 $\frac{x-a_2}{p_2}=\frac{y-b_2}{q_2}=\frac{z-c_2}{r_2}$， L_1与L_2共面当且仅当 $\begin{vmatrix}a_1-a_2 & p_1 & p_2\\b_1-b_2 & q_1 & q_2\\c_1-c_2 & r_1 & r_2\end{vmatrix}=0$ 在此小单元中，教师应鼓励学生应用向量方法来导出上述的性质和结果，尤其是利用点积求一向量 $\vec{p}$ 在另一向量 $\vec{r}$ 上的投影及利用叉积求一个给定三顶点的三角形面积。

表示删去的内容

单元 A8：矩阵

特定目标：

1. 学习矩阵的概念及运算。
2. 学习二阶方阵及三阶方阵的性质和运算及其行列式。
3. 矩阵在二维几何上的应用。

内容	时间分配	教学建议
8.1 矩阵及其运算	4	教师应介绍一个有 m 行和 n 列矩阵的通式，即 $m \times n$ 矩阵。学生应清楚矩阵的运算：加法、减法、乘法和纯量乘法及其性质。一般来说，对于矩阵 A 和 B，AB≠BA，教师应予以解释。教师应介绍以下各名词：零矩阵、单位矩阵和倒置矩阵。
8.2 二阶及三阶方阵	9	教师应定义方阵和其行列式，并清楚指出奇异矩阵和非奇异矩阵的概念及应用。学生应能计算矩阵的行列式和求出非奇异矩阵的逆矩阵，并知道下列有关逆矩阵和行列式的性质： A. 逆矩阵的性质 (i) 一矩阵的逆矩阵是唯一的。 (ii) 一矩阵存在逆矩阵当且仅当它是非奇异。 (iii) 若 A 为非奇异，则 AB =0 蕴涵 B = 0。 (iv) 若 A 为非奇异，则 AB = AC 蕴涵 B = C。 (v) 若 A、B 为非奇异，λ 为非零纯量及 n 为正整数， 则 AB、A^{-1}、A^{t}、λA、A^{n} 为非奇异及 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$， $(A^{-1})^{-1} = A$， $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$， $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$， $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$。 B. 行列式的性质 (i) 若一行列式中有两行（或两列）全等或成比例，则此行列式的值是零。 (ii) 若一行列式中有两行（或两列）互换，则此行列式的数值不变但符号改变。

38

内容	时间分配	教学建议
8.3 于二维几何的应用	8	(iii) 若一行列式的行换作列（或列换作行），则其值不变，即是 $\det A^{t} = \det A$ 或 $\lvert A^{t} \rvert = \lvert A \rvert$。 (iv) 若将一行列式中任何一行（或列）的每一分子乘以同一数，则其值亦乘以此一数。 (v) 两同阶方阵乘积的行列式等于该两方阵行列式的乘积，即是 $\det AB = \det A \cdot \det B$ 或 $\lvert AB \rvert = \lvert A \rvert \lvert B \rvert$。 学生应熟悉以矩阵表示一点和一向量；及反射、旋转、放大、位移、平移及其合成的矩阵表示法。下列各例为部分以 2×2 矩阵表示的变换： (i) 对直线 $y = (\tan\theta)x$ 的反射，以矩阵 $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ 表示。 (ii) 绕原点旋转 ϕ 角，以矩阵 $B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ 表示。 (iii) 对原点以比例因子 $k \neq 0$ 放大，以矩阵 $C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 表示。 (iv) 以因子 k 平行于 x 一轴位移，以矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示。 对于 (iii) 及 (iv)，应讨论对形状和面积的影响。教师应对学生解释清楚在上述各种变换下，所有满足 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，其中 T 代表一种变换，的每一点 P(x，y)都会转到一新点 P′(x′，y′)。熟习各变换的合成对学生明白矩阵乘积很重要。

39

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
40		*例*: 先对直线 $y=(\tan\theta)x$ 反射跟着绕原点旋转ϕ角的结果，正如上文所提及，可以乘积 BA 表示，其中 $BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$。留意此乘积是由右至左解释为：先应用变换 A 再应用变换 B。 如下的合成变换亦可提出： *例*: 以方程组 $\begin{cases}x'=y+2\\y'=-x+4\end{cases}$，其矩阵表示法为 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ 的变换。 矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 代表变换是对原点顺时针方向旋转 90°。因此，它可视为一旋转再跟着平移。 若以（3，1）为定点，此变换可视作为对（3，1）顺时针方向旋转 90°。
	21	

单元 A9：二元及三元线性方程组

特定目标：

1. 利用高斯消去法解线性方程组。
2. 认识解的存在性及唯一性。

内容	时间分配	教学建议
41 **9.1 高斯消去法及梯阵式**	5	适合下列两个性质的矩阵称为梯阵式： (1) 首 k 行非零；其余各行为零。 (2) 每一非零行的第一个非零元素为 1，并出现在前一行第一个非零元素的右列。 *例*: 以下 5×8 矩阵是梯阵式： $\begin{pmatrix}0&1&*&*&*&*&*&*\\0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&1&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 学生应懂得利用高斯消去法解二元及三元的线性方程组，方法就是利用行的基本运算将一矩阵变为梯阵式。 *例*: 解方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\3x_1+x_2-2x_3=1\\4x_1-3x_2-x_3=3\\2x_1+4x_2+2x_3=4\end{cases}$ 增广矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&1&-2&1\\4&-3&-1&3\\2&4&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-5&-5&-5\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
9.2 解的存在性及唯一性	5	原方程组与下列方程组等价 $\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$ 由此可得 $x_1 = 1$， $x_2 = 0$， $x_3 = 1$ 。 学生应知道二元或三元线性方程组的解的存在性及唯一性条件。 对于二元线性方程组： $a_1x + b_1y = d_1$ $a_2x + b_2y = d_2$ (i) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ ，方程组有唯一解。 几何上，方程组代表一对相交的直线。 (ii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ ， 方程组无解。几何上，方程组代表一对平行（而不重合）的直线。 (iii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ ， 方程组有无穷多解。几何上，方程组代表一对重合的直线 教师应与学生讨论一些如下列的三元方程组例子。当学生掌握了三维坐标几何的意义后，其几何解释可加以讨论。 (i) 在解方程组 $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 5x - 4y + 7z = 1 \\ 7x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$ 时， 明显地第三式是多余的。教师可与学生讨论求得解 $x = \frac{29 - 3\lambda}{13}$， $y = \frac{33 + 19\lambda}{13}$ ，$z = \lambda$ 的方法，其中 λ 是任意数。

内容	时间分配	教学建议
	10	（ii） 解不一致方程组如 $\begin{cases} x + y + z \quad = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$ 。 循此路向，可以更抽象形式表示三元线性方程组的解的存在性及唯一性条件。

表示删去的内容

单元 A10：复数

特定目标：

1. 学习复数的性质、几何表达法及应用。
2. 学习棣美弗定理及其在求复数的 n 次根、解多项式方程和证三角恒等式的应用。

内容	时间分配	教学建议
10.1 复数的定义及其算术运算	3	教师应简单介绍符号 i。数 $z = x + yi$，其中 x、y 为实数，称为复数，而 x、y 分别称为复数的实部(Re z)和虚部(Im z)。当 $x = 0$，$y \neq 0$，$z = yi$ 称为纯虚数；当 $y = 0$，$z = x$ 则为实数。 教师可问学生应如何定义复数等式，但须指出复数并无次序性质。 两个复数的和、差、积及商亦应给予定义。
44 **10.2 阿根图、辐角和共轭**	6	学生应知道以下各项的定义：复数 z 的模 $\lvert z \rvert$、辐角 arg z、辐角的主值和它的共轭复数 $\bar{z}$。 复数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的模辐形式亦可写为 $z = r\,\mathrm{cis}\theta$。 学生应理解下列复数的性质： (i) $\lvert z_1 z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert$ (ii) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$，其中 k 为整数。 (iii) $\lvert \frac{z_1}{z_2} \rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$ (iv) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$，其中 k 为整数且 $z_2 \neq 0$。 教师应教授下列共轭复数的性质： 1. $\bar{\bar{z}} = z$ 2. $\bar{z} = 0$ iff $z=0$ 3. 一个复数是自共轭当且仅当其为实数。

内容	时间分配	教学建议
		4. $z \cdot \bar{z} = \lvert z \rvert^2$ 5. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ 6. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$ 7. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$ 8. $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$，$z_2 \neq 0$ 利用此等性质，学生不难证明： 如α是实系数多项式方程的根，则 $\bar{\alpha}$ 亦为其根；即是若实系数多项式方程的根不是实数，则必以共轭偶(对) 形式出现。 学生应知道下列不等式： (i) $\lvert \mathrm{Re}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (ii) $\lvert \mathrm{Im}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (iii) $\lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$ (三角不等式) 学生亦可用类似方法证明： $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert$ 和 $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_2 \rvert - \lvert z_1 \rvert$。 三角不等式可用数学归纳法推广至： $\lvert z_1 + z_2 + \ldots + z_n \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert + \ldots + \lvert z_n \rvert$。 学生须学习复数在阿根图的几何表达法，并应知道实轴和虚轴。教师亦应教授复数的极形式的表达法及其几何意义。可介绍$\mathrm{cis}\theta$的另一记法$e^{i\theta}$给学生，固此$z = r e^{i\theta}$；此记法称为复数的指数形式或欧拉形式。
45 **10.3 于平面几何的简易应用**	5	学生应知道三角不等式的几何意义，并须学习复数在平面几何的多种用途，以下为两例： 1. 在阿根图上，XYZ 为等边三角形，而其外心在原点上；若 X 代表复数 1 + i，求 Y 和 Z 所代表的复数。

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
10.4 棣美弗定理		2. 若z_1、z_2和z_3为代表一等边三角形顶点的三个相异复数，则 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$ 。 学生应学习在阿根图上移动点的轨迹的例子，以下为两个简单例子： 1. 求出点 z 的轨迹，使得 $\lvert z-a\rvert=k$，其中 a 是一复数和 k 为一正常数。 2. 求出点 z 的轨迹，使得 $\left\lvert\frac{z-a}{z-b}\right\rvert=k$ ，其中 a、b 为复数，k 为不同值的正常数。,
10.4a 有理数指数的棣美弗定理	3	学生应学习证明当 n 是正整数时，下列定理成立： $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 此处假定 $(\cos\theta+i\sin\theta)^\circ=1$ 。 当 n 是负整数时，可设 $n=-m$，m 为一正整数，学生亦应能证明定理在 n 为负整数时也成立。但当 $n=\frac{p}{q}$，其中 p、q 为整数，$q\neq 0$，证明须待学生完成复数 n 次根的学习方可进行。
10.4b 于三角恒等式的应用	3	由棣美弗定理 $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ，其中 n 为一正整数，可将 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 写成 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 的乘方。 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则可利用 $\begin{cases} z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \\ z-\frac{1}{z}=2i\sin\theta \end{cases}$ 和 $\begin{cases} z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta \\ z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta \end{cases}$

内容	时间分配	教学建议
10.4c 复数的 n 次根及其几何解释	~~5~~ 4	将 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的乘方表为倍角的正弦和余弦。例如，学生应能将 $\cos^4\theta\sin^3\theta$ 表为倍角的正弦的和 及 $\cos^3\theta\sin^4\theta$ 表为倍角的余弦的和。 学生应学习复数 n 次根的定义；并须详细学习 1 的 n 次根(即 n 次单位根)。以下数例可供课堂讨论 ： 1. 求 -1 的五次根。 2. 解方程 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 。 3. 求 $1+i$ 的立方根。 4. 因式分解 $z^{2n}-2z^n\cos n\theta+1$ 为实二次因式。
	~~25~~ 24	

表示删去的内容

单元 B1：序列、级数及其极限

特定目标：

1. 学习序列和级数的概念。
2. 认识序列和级数的极限的直观概念。
3. 认识无穷序列和无穷级数的特性。

内容	时间分配	教学建议
1.1 序列及级数	6	序列和级数的概念应该清楚地提出。下列的介绍方法可供参考： 若a_n为对应正整数n可定义的函数，其数值a_1，a_2，a_3，…a_n，…则可组合成一序列。至于该序列为有限或无限则须视乎项数是有限或无限。再者，$a_1+a_2+...+a_n+...$ 则称为级数。至于该级数为有限或无限必须视乎其所包括的数目而定。下列为常用记法： $S_n=\sum_{r=1}^{n}a_r$ 或 $\sum_{1}^{n}a_r$ 有关序列和级数的简易运算及法则应予介绍。为方便起见，序列a_1，a_2，a_3，…和b_1，b_2，b_3…可用$\{a_i\}$和$\{b_i\}$表示，则 (i) $\{a_i\}\pm\{b_i\}=\{a_i\pm b_i\}$ (ii) $\lambda\{a_i\}=\{\lambda a_i\}$ 亦即，可涉及项与项之间的运算概念。 对级数求和法，可参考下列方法： (1) 数学归纳法：本课程中单元 A3 已有提及。 (2) 求差方法：教师应强调级数中第r项可写为f(r + 1)及f(r)之差，其中f(x)为x的函数。即 若 $a_r=f(r+1)-f(r)$ 则 $\sum_{1}^{n}a_r=\sum_{1}^{n}[f(r+1)-f(r)]$ $=f(n+1)-f(1)$ $\sum_{1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ 及 $\sum_{1}^{n}r(r+1)$ 就是其中一些典型例子。

48

内容	时间分配	教学建议
1.2 序列及级数的极限	7	若级数的项是可以用下列递推关系表达的话： $a_r-a_{r-1}=f(r)$ 或 $a_r=Aa_{r-1}+Ba_{r-2}$ 以下是找出a_r的解的方法：（特别适用于后者） 设α、β为辅助方程 $\lambda^2=A\lambda+B$ 的根， (i) 若$\alpha\neq\beta$，则 $a_r=k_1\alpha^r+k_2\beta^r$ (ii) 若$\alpha=\beta$，则 $a_r=(k_1+rk_2)\alpha^r$ 其中 k_1 和 k_2 为待定常数。 序列的极限概念应以直观方式教授，下列方式可作参考： 设a_1，a_2，…，a_n，…为一序列，对一任意大的数值n，则a_n与一常数 ℓ 的差为一任意小的正数，我们亦可以写为 当 $n\to\infty$ 时 $a_n\to\ell$，或 $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$。 教师应同时强调下列各点： (i) ℓ 称为该序列的极限。 (ii) 若极限 ℓ 是存在的话，则必是唯一的极限。 (iii) 该序列在 ℓ 收敛，或该收敛序列的极限为 ℓ。 (iv) 若一序列并不收敛于任何极限，则称为发散序列。 并应提供充足的收敛和发散序列的例子以作说明。此等例子如下： (1) $\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$，其中 $a>0$。 (2) 序列 $a_n=\frac{\sin\frac{1}{2}n\pi}{n}$ 收敛于极限 0。 (3) 发散序列 $a_n=\{1+(-1)^n\}\sqrt{n}$。 (4) 振动发散序列 $a_n=(-1)^n(1+\frac{1}{n})$。

49

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		注意：序列可分为收敛，发散(至 $+\infty$ 或 $-\infty$)或振动（并不收敛或发散至 $+\infty$ 或 $-\infty$ ）不同类别。 收敛序列的一般性质亦应与学生讨论： 设a_1，a_2，a_3，…，a_n，… 和b_1，b_2，b_3，…，b_n，…为收敛序列，其极限分别为a和b，则下列序列亦具收敛性质。 (i) λa_1，λa_2，λa_3，…. 收敛于 λa，其中 λ 为一常数。 (ii) a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3，… 收敛于$a+b$ 。 (iii) a_1b_1，a_2b_2，a_3b_3，…收敛于 ab。 (iv) $\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{a_3}{b_3}$，…收敛 $\frac{a}{b}$，假若 $b\neq 0$。 最后学生应在老师指导下认识到下列因果关系： (i) 设收敛序列a_1，a_2，a_3，…的极限为a， 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，其中k为一正整数。 (ii) 设$a_1$，$a_2$，$a_3$，…和$b_1$，$b_2$，$b_3$，…为两收敛序列，其极限同为 ℓ；而若另一序列c_1，c_2，c_3，…，其中当 $i>k$，k为一正整数，$a_i\le c_i\le b_i$，则c_1，c_2，c_3，…亦为收敛，而且其极限亦是 ℓ。该性质通常称为迫近定理，教师可将单调序列和有界序列加以介绍，以便扩阔学生对序列的认识。 至于无穷级数方面，教师可用类似如下的处理方法： (1) 收敛概念 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1}^{n} u_i = S$ 存在，则级数 $u_1+u_2+u_3+\ldots$为收敛，并且可称S为级数的总和。若用S表示 $u_1+u_2+\ldots+u_n$，则其结果可写成为： 当 $n\to\infty$ 时，$S_n\to S$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ($S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$通常称为第n个的部份和）在类似情况下，教师可选择引入发散和振动的概念。

内容	时间分配	教学建议
		(2) 收敛级数的性质 若 $u_1+u_2+u_3+\ldots$的极限为S和$v_1+v_2+v_3+\ldots$的极限为 S’ 则 (a) $\lambda u_1+\lambda u_2+\lambda u_3+\ldots$收敛于 λS， λ 为一常数； (b) $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots\ldots$收敛于 $S+S'$； (c) 若$u_1+u_2+u_3+\ldots$收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。
1.3 序列及级数的收敛性	5	介绍收敛序列的特性，如 (i) 收敛序列为有界 (ii) 单调而有界的序列为收敛 此外，一些典型的收敛序列和发散序列亦应加以讨论，并以下列之实例说明计算序列极限的方法。 (A) 收敛序列 (i) $a_n = x^n$，设 $\lvert x\rvert<1$ (ii) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (iii) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ (B) 收敛级数 (i) $r+r^2+r^3+\ldots$，设 $\lvert r\rvert<1$ (ii) $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$ (iii) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ (iv) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		(C) 发散级数 (i) $\Sigma \frac{1}{n}$ (ii) $\Sigma (1-\frac{1}{n})^n$ (iii) $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ 此方法应包括迫近定理的典型应用例题，但毋须对收敛性的测试再作深究。
	18	

52

单元 B2：极限、连续性及可微性

特定目标：

1. 理解函数的极限的直观概念。
2. 理解函数的连续性及可微性的直观概念。
3. 认识极限作为微积分的基本概念。

内容	时间分配	教学建议
2.1 函数的极限	5	函数的极限应以直观方式介绍。其实，在x＝a时，函数y＝f(x)的极限概念应与序列的极限概念连系起来。当自变量经过一收敛序列$\{x_n\}$(横坐标序列)，其极限为a时，则可考虑其直坐标序列$\{f(x_n)\}$。故此当$\{x_n\}$趋近a时，则 $\{f(x_n)\}$趋近一有限值 ℓ 之情况，应可清楚而明确地表达，即是 若 $x \to a$ 则 $f(x) \to \ell$ 或 $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ 部份教师可能会将重点放在当 x 与 a 为相当接近时，则 f(x)与 ℓ 之间的差异可以任意的小的概念上，从而强化当 $x \to a$ 时， $f(x) \to \ell$ 的理解。 但必须向学生指出，函数值 f(a) 的存在，并不能引申为极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的存在及等于 f(a)，縱使在一般情况下可成立。教师可参考下列例子： $f(x) = \begin{cases} 1 & 當\ x \neq 0 \\ 0 & 當\ x = 0 \end{cases}$ 这裏 $f(0) = 0$ 和 $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ 自变量趋近极限 a 的途径应加以注意：当 x 的值是由左至右增加时，函数的极限称为左方极限，以 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 表示；当 x 的值是由右至左递减时，极限称为右方极限，以 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 表示。 由此，教师不难引导学生理解当 $x \to a$ 时，函数 f(x)的极限存在当且仅当其左方极限和右方极限相等。至于对极限作更广泛理解，教师应讨论 $x \to \infty$ 的情况，使学生再一次明白当 x 趋于一足够大的数时，f(x)与 ℓ 的的差异可任意的小，并表为 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ 。

53

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
54		下列函数的极限性质应包括在讨论范围内： (i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)]=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$，k 与 x 无关 (iii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$ (v) 若 $f(x)\le h(x)\le g(x)$ 在 x 接近 a 时成立，而且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell$，则 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\ell$。 一些重要的极根，如下列者，应予以介绍： (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ell n\,a$；$a>0$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=1$ (7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ell n\,x}{x-1}=1$ 教师应给予学生足够的计算函数极限的练习以便强化他们在这方面的训练。

内容	时间分配	教学建议
55 **2.2 函数的连续性**	4	函数的连续性的定义是应以函数的极限作为基础，以及用直观的方法加以解释，不宜涉及$\varepsilon-\delta$ 的概念。教师可参考下列建议： 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在兼且等于 f(a)，则函数 f(a)在 $x=a$ 连续。 若函数在某区间内的每一点连续，则函数在该区间内连续。 在引入函数于一点的不连续性前，应讨论一些常见的函数，例如： (i) $f(x)=x^2$ 在任何区间内皆连续。 (ii) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 并非在整个区间 $0\le x\le 5$ 内连续。 上述概念并不需要作严谨的处理，但教师宜提供广泛而合适的例子，以便加强学生在这方面的认识，并理解若两函数在 $x=a$ 连续，则它们的和、差及乘积在该点亦为连续，而当分母不等于零时，它们的商亦为连续。教师应引用一些在整段实数线上皆为连续的例子，以启发学生进一步的认识： (i) 多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ (ii) 指数函数 $f(x)=a^x$；$a>0$ (iii) 对数函数 $f(x)=\log_a x$；$a>0$，$a\neq 1$ (iv) 三角函数，例如 $\sin x$、$\cos x$ 对于合成函数的连续性，教师可采纳下列方式： 设 $y=f[g(x)]$ 为一合成函数，其内函数 g(x) 在 $x=a$ 连续，其外函数 $y=f(t)$在 $t=g(a)$亦为连续，则合成函数 $y=f[g(x)]$在 $x=a$ 连续。 教师可强调每一连续函数的连续函数亦为连续。 教师应指出在一区间内的连续函数拥有一系列值得注意的性质，并加以讨论，但不宜作严谨的证明。这些性质包括： (i) 若函数 f(x)在闭区间 [a，b]内连续，其中 f(a)= A 和 f(b) = B，$A\neq B$，则 f(x)在 A 与 B 之间的每一数值取值一次或以上。(介值定理) (ii) 闭区间上的连续函数必为有界。

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		(iii) 闭区间上的连续函数必有其极大和极小值。 (性质 (ii) 和 (iii) 称为魏尔斯脱拉斯定理)
2.3 函数的可微性	4	函数 f(x) 在 x= a 的可微性定义如下： 函数 f(x) 在 x= a 上可微当且仅当极限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 或 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在。 教师应同时指出若一函数在某点可微， 则函数在该点连续，而连续性祗是可微性的必要条件而并非充分条件。并且，函数在 x = a 的导数定义就是上述极限的值。学生可透过上述学习理解可微性的概念。函数 f(x) 在 x = a 的导数可表为 $f'(a)$ 、 $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right\|_{x=a}$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=a}$ 教师应提及若函数在一区间内每一点皆可微，则该函数在该区间内可微，兼且在区间内的每一 x 值，皆对应于函数在该点的导数 f'(x)，因此 f'(x)亦为 x 的函数，称为 f(x)的导函数。 在这阶段，教师应预备充足例题以便学生能掌握微分法的概念和技巧，至于从基本原理求取一些典型函数的导数，尤为重要。故此，足够的练习是不可缺少的。下列例子可作参考考： (1) 利用第一求导法则，找出下列函数于各点的导数： (i) x^2于x = 1 (ii) e^x于x = 0 (iii) sinx 于 $x=\frac{\pi}{4}$ (2) 利用第一求导法则，求下列函数的导数： (i) $f(x) = x^n$其中n为一正整数 (ii) $f(x) = e^x$
	13	

56

单元 B3：微分法

特定目标：

1. 掌握微分法的不同技巧。
2. 学习及掌握求高阶导数的技巧。
3. 理解洛尔定理及中值定理的直观概念。

内容	时间分配	教学建议
3.1 微分法的基本法则	4	作为延续，教师应讲解以下法则： (1) $\frac{d}{dx}(k)=0$，其中 k 为常数 (2) $\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$，r 为实数 (3) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$ (4) $\frac{d}{dx}[kf(x)]=k\frac{d}{dx}f(x)$，其中 k 为常数 (5) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)$ (积法则) (6) $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$， $g(x)\neq 0$ (商法则) 教师可提供以上法则的证明，藉以加强学生在概念上及技巧上的掌握。从(3)至(6)，要强调 f(x)及 g(x)的导数的存在。关于(2)，对 r 为整数的证明已足够，对 r 为实数的证明可留待至学生已学习链式法则及对数微分法。教师应列举一些常见的函数以示范使用以上法则求导数。
3.2 三角函数的微分法	2	教师应讲解以下函数的微分法 ： 1. sin x 2. cos x

57

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		3. $\tan x$ 4. $\operatorname{cosec} x$ 5. $\sec x$ 6. $\cot x$ 教师可鼓励学生作出以上的证明，并提示学生(4)至(6)的证明可使用商法则。
3.3 复合函数及逆函数的微分法	4	复合函数 $y = f[g(x)]$ 的导数可透过链式法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ 或 $= f'(t)g'(x)$，其中 $t = g(x)$，求得。 $y = f(x)$ 的逆函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导数，可利用 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 求得。 教师可用以下例子作示范 ： $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$ 、 $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)$ 、 $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$ 及 $\frac{d}{dx}(x^{-n})$ 、 $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})$，其中 n 为正整数。
3.4 隐函数的微分法	2	隐函数 $F(x, y) = 0$ 的微分法，可利用上述各法则，对于自变量 x，求方程各项的导数。教师应给予示例，加强与学生的讨论，下列是一些建议： (i) 若 $x \cos y^3 + y \sin 2x = 1$，求 $\frac{dy}{dx}$。 (ii) 已知 $2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 3 = 0$，求在点(2，5) 的导数 $\frac{dy}{dx}$。 (iii) 对 $\cos(x^2 - y^2) = xy$，求 $\frac{dy}{dx}$。

内容	时间分配	教学建议
3.5 参数方程的微分法	2	对于用参数方程 $x = u(t)$，$y = v(t)$ 表达的函数 $y = f(x)$，y 可被表为对 t 的复合函数 $y = f(u(t))$。透过键式法则，可得出 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$，故此 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 或 $f'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)}$。学生需明白在求导时。u(t) 及 v(t)必须为可微的及 $u'(t) \neq 0$。 教师可示范以下求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子： (i) 椭圆 $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ (ii) 旋轮线 $x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$
3.6 对数函数及指数函数的微分法	6	教学范围包括以下法则，教师可使用建议的方法提供证明： 1. $\frac{d}{dx}(\ell n\, x) = \frac{1}{x}$ (用 $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$) 2. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ (用 $\frac{d}{dx}\ell n\, y = \frac{1}{y}$ 及链式法则，其中 $y = e^x$ 或应用逆函数的求导法则) 3. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\, \ell n\, a}$ 4. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\, \ell n\, a$ 教师应提供如下列的例子： e^{x^3} 及 $\log_a \sqrt{x^2+1}$ 。 (注意：为求完整起见，教师可与学生讨论，对n为有理数及实数，公式 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ 的证明。) 教师应强调一些应用对数微分法的例子，例如：

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		当 y 为 x 的复杂的函数，尤其当 y 涉及变量指数，导数 $\frac{dy}{dx}$ 可从对数微分法求得。下列是一些常见的例子： $y = x^x$ 及 $y = \frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x+d)}$ 。
3.7 高阶导数及莱布尼兹定理	5	教师应引入高阶导数的定义及符号 $f''(x)$、$f^{(n)}(x)$、$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的意义。此外，学生亦应能求以参数方程表达的函数的高阶导数和应用莱布尼兹定理 $\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} C_r^n u^{(n)} v^{(n-r)}$ 。学生可尝试以数学归纳法证明此定理。教师应示范以莱布尼兹定理求涉及函数的高阶导数的方程，尤其涉及隐函数，下列是一些例子： 1. 求 $\cos^2 x \sin x$ 和 $x^3 \cos x$ 的 n 阶导数。 2. 设 $f(x) = \tan^{-1} x$ 。证明 $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ 及求对 $x=0$，$f(x)$的n阶导数。 3. 已知 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ 。 证明 $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & 若 n 爲偶數 \\ -n! & 若 n 爲奇數 \end{cases}$， 其中 n 为整数及 $n \geq 3$ 。
3.8 洛尔定理及中值定理	3	教师应讲解洛尔定理和中值定理的直观概念及其几何意义。对于能力较高的学生，则可提供定理的证明。学生应学习简单及直接应用定理的题目。可考虑下列问题 ： 1. 若对所有在某区间内的x值，$f'(x) = 0$，则f(x)在该区间内为一常数。 2. 若对所有在某区间内的x值，$f'(x) = g'(x)$，则f(x)与g(x)在该区间内的差为一常数。

内容	时间分配	教学建议
		3. 证明若 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ ，则方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ 在 0 与 1 之间有至少一个根。
	28	

表示删去的内容

单元 B4：微分法的应用

特定目标：

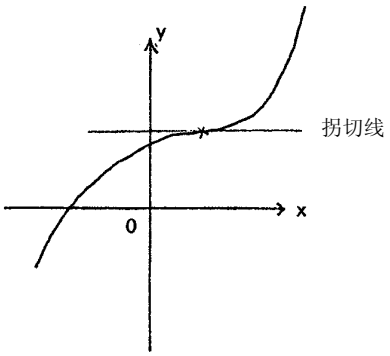
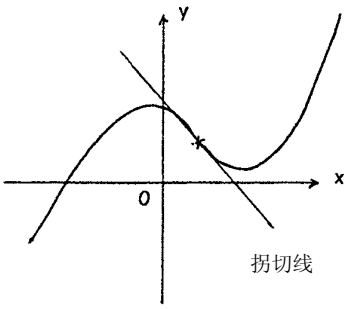
1. 学习和使用洛必达法则。
2. 学习微分法的应用。

内容	时间分配	教学建议
4.1 洛必达法则	4	引入以下待定型的极限： $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$， 0^0，∞^0，1^∞。 首先宜展示上述形式出现的例子。教师应讲解洛必达法则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 以处理 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 待定型的极限。以下例题可作考虑： 1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos^2\pi x}{e^{2x}-2ex}$ 2. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\ell n\sin(x-a)}{\ell n\tan(x-a)}$ 教师应强调必须先简化 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 然后才计算极限，而此过程可不断重复直至 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$ 已定型。至于其它待定型的极限，可引入例题以展示该等极限可转化为待定型 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的样子，使可应用洛必达法则。以下例题可作考虑： 1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

内容	时间分配	教学建议
		3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ 而洛必达法则的证明则不包括在内。
4.2 变率	3	藉着一些常用的量，如速度和加速度等，引入并详细讨论 $\frac{dy}{dx}$ 作为 y 对于 x 的变率。 可考虑以下例题： 1. 一雪球溶化时，其体积以恒速度x cm^3/s.减少。当其半径为a cm时。求其 (a) 半径的变率； (b) 表面面积的变率。 2. 一移动中的质点与一定点在时间 t 的位移 x 为 $x = a\sin t + b\cos t$。 (a) 求该质点在时间 t 的速度和加速度，并描述其运动。 (b) 证明在时间 t，其速度可表明为 $\sqrt{a^2+b^2-x^2}$ 。
4.3 单调函数	2	作为开始，教师可引述以下直观且显而易见的结果： 若 $f'(a)>0$，则对所有小过但充份接近 a 的 x 值 $f(x)<f(a)$，及对所有大过但充份接近 a 的 x 值 $f(x)>f(a)$。 从几何的角度看，以上结果可引伸至此语句：当 $x = a$ 时 f(x)是严格地递增。(注意：讨论中的函数是连续和可导的。)相似的描述亦可用于当 $x = a$ 时，f (x)是严格地递减的。 由此，单调递增的概念可被表达如下： 若对所有在该区间的 x 值 $f'(x)>0$，则 f(x)在该区间内为一单调递增的函数。 教师应引导学生得出以下重要结果： 若在区间 (a，b)内，$f'(x)>0$、函数f(x)在$x = a$连续及$f(a)\geq 0$，则f(x)在该区间内便为正数。 单调递减函数的处理亦可用相同方法处理，学生可提供类似的描述。 以上结果在证明一些如下的不等式时有着重要的相关性：

表示删去的内容

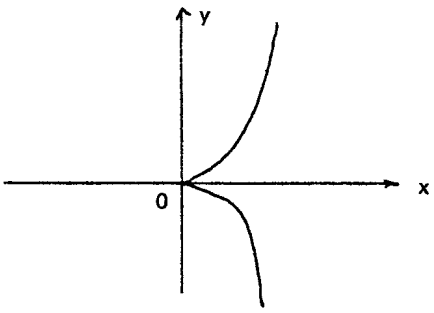
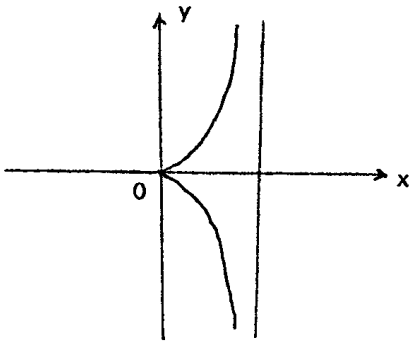
内容	时间分配	教学建议
		(i) $(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x$ ，对 $0<\alpha<1$ 及 $x \ge -1$ (ii) $(1+x)^{\alpha} \ge 1+\alpha x$ ，对 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 及 $x \ge -1$ (iii) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$ ，对 $x>0$
4.4 极大和极小	5	藉着引入曲线的斜度的定义，教师应解释及强调导数作为曲线的斜度的几何含意。关于此点，教师可一再加强学生对曲线的递增或递减的图像理解。 当学生已熟习以上知识后，教师可引导学生掌握辨认局部极大点及局部极小点(即曲线的转向点)的能力。学生要学习以下关于判断局部极值的情况： 对函数f(x)， (a) 求 a 致使 $f'(a)=0$ 及 (b) 检查 $f''(a)=0$ 的符号或检查在 a 的邻域中 $f'(x)$ 的符号改变。 教师应提醒学生以下事项： (i) 局部或相对极值未必为全局或絶对极值； (ii) 转向点可于导数不存在的地方出现，如 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 及 $y=\|x\|$； (iii) 平稳点的导数为零； (iv) $f'(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能给出局部极值，如 $x^3\sin\frac{1}{x}$ 及 x^3 。 教师应讨论及示范与以上技巧有关的例题。接着可讨论拐点，常用的方法如下: (a) 求 a 致使 $f''(a)=0$ (b) 检查在 a 的邻域中 $f''(x)$ 的符号改变。 教师应提醒学生以下事项： (i) 于拐点，其导数未必相等于零； (ii) $f''(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能给出拐点，如 x^4 。 因此，一些能展示不同方向的拐切线的图像会有很大的帮助。

内容	时间分配	教学建议
		  最后，对于当函数的定义域扩大或缩小时与其絶对值的关系，教师可加以简单解释。
4.5 曲线描绘	6	本课题开始前，学生先要学习求出曲线上存在着的垂直、水平及斜渐近线。讲解时，教师宜运用例题以作解释。例如：曲线 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 。 学生应明白到垂直渐近线可于不连续点出现,然后再学习当 x 趋向无限大时函数的表现，例如 $\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}\to x$ 当 x 为充份地大，所以可理解到 $y=x$ 为一渐近线。 在完成本课题时，教师应帮助学生寻找、选取及组织所有有关的数据，以便能有系统地描绘曲线。以下事项值得注意：

表示删去的内容

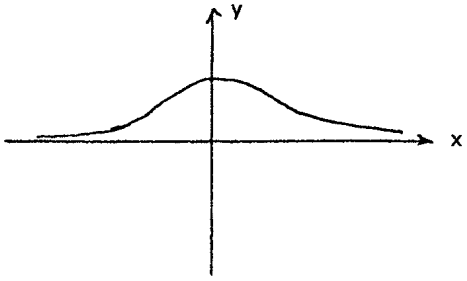
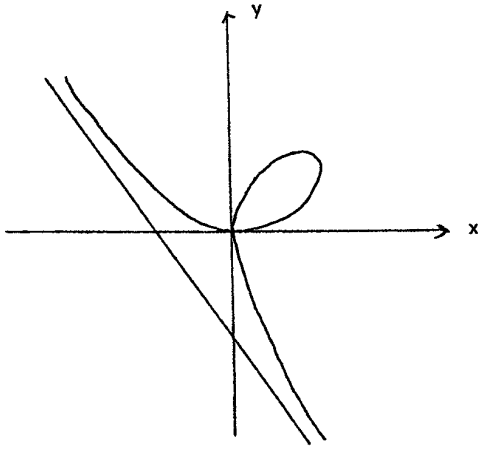
内容	时间分配	教学建议
		(1) 对称于两轴：检查方程以探查对称性 (a) 如无y的奇数幂出现，曲线则对称于 x 轴； (b) 如无x的奇数幂出现，曲线则对称于 y 轴； 例如：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是对称于两轴。 (2) x 及 y 的值域的限制 例如：(a) 对 $y^2=4x$，x必为非负数，而y则可取所有值。 (b) 对 $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$，可写成 $y^2=\frac{a^2x^2}{x^2+a^2}$，所以x可取所有值；但当写成 $x^2=\frac{a^2y^2}{x^2-y^2}$，明显地 $\|y\|<a$。事实上，此曲线是包含在渐近线 $y=\pm a$ 内。 (3) 与两轴的截距或任何在曲线上容易见到的点。 例如：对 $y=\frac{x(x+2)}{x-2}$，曲线的 x 截距为 -2 及 0；而曲线仅与 y 轴相交于原点。 (4) 极大、极小及拐点。 (5) 曲线的渐近线。 为了全面的学习这课题，教师在例题中要多提点学生须注意的地方。对于三角函数，学生要注意曲线的周期。至于用参数方程表达的曲线则没有特定要注意的法则，较好的方法就是尽量求得相对的笛卡儿方程然后描绘。 教师应描绘一些能示范以上步骤常见的例子给学生参考。以下例子可作考虑：

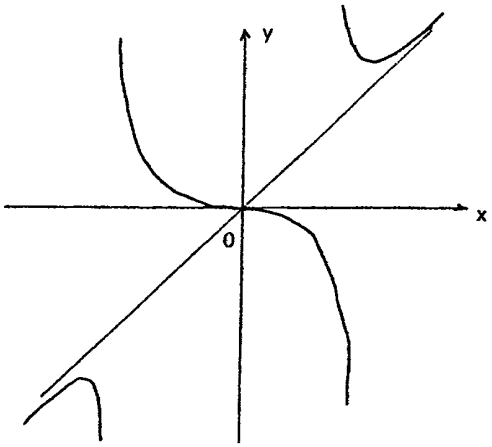
66

内容	时间分配	教学建议
		1. $y^2=ax^3$  2. $y^2(a-x)=x^3$ 

67

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
89		3. $y=\frac{1}{x^2+a^2}$  4. $x^3-3axy+y^3=0$ 

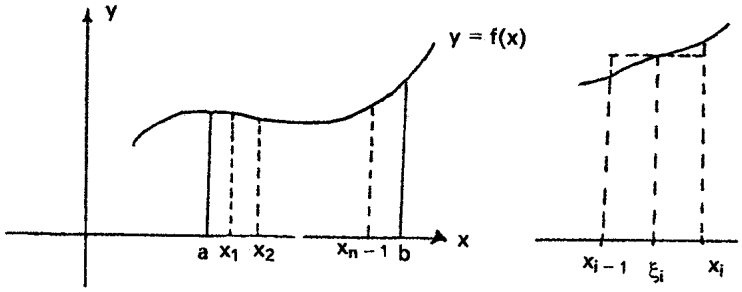
内容	时间分配	教学建议
69	20	5. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 

表示删去的内容

单元B5：积分法

特定目标：

(1) 理解积分作为极限和的概念。
(2) 学习有关积分的性质。
(3) 理解积分基本定理。
(4) 运用积分基本定理于积分的求值。
(5) 学习一些求积分的方法。
(6) 掌握广义积分的基本概念。

内容	时间分配	教学建议
5.1 黎曼积分的定义	5	有关定积分的理论可由两相异的途径表达：其一为透过几何直观的进路，此外亦可采用纯分析的进路，前者需倚赖几何的面积概念，而后者则引用定积分作为一代数和的极限的概念而无需引用几何概念。教师宜按学生所需决定其取向及施教次序。以下乃一简化的说法以供参考： 在区间 [a，b] 内，设 $f(x) \geq 0$ 及其图像为有限和连续。  用点x_0，x_1，x_2，…，x_n将[a, b]分成n个子区间其中$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$，同时设 $x_i - x_{i-1}$ 记为 Δx_i及 ξ_i 为在$[x_{i-1}, x_i]$内任一点。由曲线$y = f(x)$、直线$x = a$及$x = b$

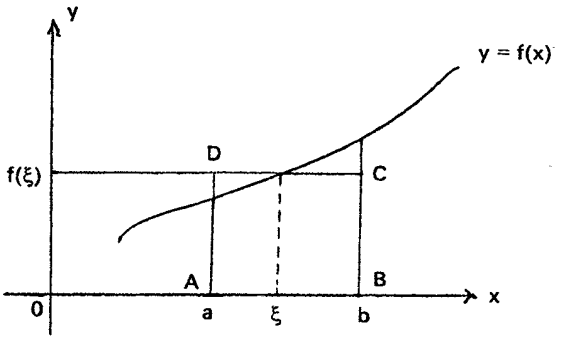
内容	时间分配	教学建议
		和 x－轴所包围的区域的面积约为总和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 。此外，当 n 增加而 $\max(\Delta x_i) \to 0$，可求此面积的值而此总和的极限则定义为 f(x) 由 $x = a$ 到 $x = b$ 的定积分并记为 $\int_a^b f(x)\,dx$ ，即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max(\Delta x_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 其中记号 f(x) 称为被积函数； a 称为下限； b 称为上限而此总和则称为黎曼和。 教师和学生讨论时，应强调下列各点： (1) [a，b] 是任意分割成子区间的； (2) $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$是任意的； (3) 将定积分定义为总和的极限已先假设$a < b$。当 $a > b$ 其值定义为 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 而当 $a = b$ 时，$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (注：若定积分是利用函数F(x)作定义的，则这些结果可 视为定理；则 $F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$ 及 $F(a) - F(b) = 0$ 教师应示范例题并加以说明以帮助学生充分明白。以下的例题可作参考。 *例一* $\int_a^b e^x\,dx$ 若使用相等的区间 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h$(设)，则 $x_0 = a$ ， $x_1 = a + h$， …，$x_{i-1} = a + (i-1)h$。设 ξ_i 为 x_{i-1}，即 $\xi_i = a + (i-1)h$。 由于 $\max \Delta x_i = \Delta x_i = h$，

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		$\int_a^b e^x dx = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i} h = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)h} h = \lim_{h\to 0} he^a \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)h}$ $= \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{nh}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{b-a}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} h\frac{(e^b-e^a)}{(e^h-1)}$ $= (e^b-e^a)\lim_{h\to 0}\frac{h}{(e^h-1)} = (e^b-e^a)\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^h} = e^b-e^a$ *例二* $\int_a^b x^m dx$，$m\neq -1$ 考虑n个区间其中 $x_0=a$，$x_1=ar$，…，$x_i=ar^i$，$x_n=ar^n=b$。当 $n\to\infty$，$b=ar^n$ $\Leftrightarrow r=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$ 因此 $r\to 1$，同时 $\max\Delta x_i=\Delta x_n=x_n-x_{n-1}=ar^n-ar^{n-1}=ar^n(1-r^{-1})=b(1-r^{-1})\to 0$。 设 $\xi_i=x_{i-1}=ar^{i-1}$ $\int_a^b x^m dx = \lim_{r\to 1}\sum_{i=1}^{n}(ar^{i-1})^m(ar^i-ar^{i-1})$ $= \lim_{r\to 1}\sum_{i=1}^{n} a^{m+1}r^{(m+1)(i-1)}(r-1)$ $= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r-1)\cdot\frac{r^{(m+1)n}-1}{r^{m+1}-1}$ $= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r^{(m+1)n-1})\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$ $= \lim_{r\to 1}(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$ $= (b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{r\to 1}\frac{1}{(m+1)r^m}$

内容	时间分配	教学建议
		$= \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ 其后，教师仍须详述下列各点： (1) 若f(x)在[a，b]是连续的，则f(x)在[a，b] 为可积的； (2) 若f(x)在[a，b]是有界的和单调的，则f(x)在 [a，b]是可积的。
5.2 定积分的简单性质	4	教师可帮助学生从定义推导下列结果： (1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$，其中k为常数。 (2) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$。 (3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ 而c是在区间 [a，b] 内或外任一点。 (4) 若在[a，b]，对应于所有x的值，f(x) ≥g(x)，则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$。 (5) 若在[a，b]，对应于所有x的值，$\lvert f(x)\rvert \leq \phi(x)$， 则 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq \int_a^b \phi(x)\,dx$。 其中的特例有 (a) 若 $\phi(x)=\lvert f(x)\rvert$，则 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$。 (b) 若 $\phi(x)=M$，而M 为常数，则 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq M(b-a)$。 可和学生讨论一些简单而直接的应用如下： (1) 若对 $x>0$，f(x) 是正的和单调递增的，试证明 $f(n-1)\leq\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n)$。

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
5.3 积分中值定理	2	(2) $\left\lvert \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2}dx \right\rvert \le \frac{\pi}{4n}$ 。 此定理宜以一简化的形式表达，即如： 若 f(x) 在 [a, b] 是连续的，则在（a，b）中存在一数 ξ，而且 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$ 从附图中可容易看出要传达的概念。学生应不难明白 f(ξ)(b–a)原来的意义就是矩形 ABCD 的面积。  如果想要一较形式化的证明，则可以用 5.2 所提及的性质和连续函数的性质，而其中特别可用介值定理。

内容	时间分配	教学建议
5.4 积分基本定理及其于计算积分的应用	4	积分的第一基本定理如下： 设 f(x) 在 [a，b] 是连续的及 设 F(x) 的定义为 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ，其中 $a \le x \le b$ ， 则 (i) F(x) 在 [a，b] 是连续的 (ii) F(x) 在 (a，b) 是可微的和 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ 。 亦可以简化的形式如下 ： 若 f (x) 是连续的，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 是可微的且其导数相等于被积函数当在积分上限时的数值，即 $F'(x)=f(x)$。 教师应和学生详细讨论而学生可在教师指导之下引用积分的中值定理来证明此定理。 (注：教师应在教授此定理之后立即详述下列各点： (1) 若一函数 F(x)的导数与被积函数 f(x)是相等的，则 F(x)被称为 f(x)的原函数。 (2) 若同一被积函数的两个原函数为 F(x) 和 G(x)，则 F(x) – G(x) 的导数是恒等于零的，因此 F(x) – G(x)是常数。) 至于积分的第二基本定理，教师亦可以同样手法帮助学生导出。可考虑下列的方式： 设 f(x) 和 F(x)在[a，b] 是连续的； 若对于 $a < x < b$，$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ，则对于 $a < x \le b$ $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$ ，而其中 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
76 **5.5 不定积分法**	6	教师应示范一些有启发性的例题以增强学生对上述定理的全面理解。在计算定积分时一方面将其视为一无限的总和而另一方面可求有关的原函数作为另一方法。由此可以提高学生对利用微分的逆运算来计算积分的认识。 教师可先用简单的例题如 $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ 而最后用其它有趣的应用题如下： (1) 若考虑 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 [1，2]，则可以建立以下的结果 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ell n\,2$ 当 $n \to \infty$， (2) 若考虑 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 (0，1)，则可以证明当 $n \to \infty$ 时，$n\sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$ 。 作为上述的延续，学生应将注意力集中在求原函数的机械程序作为计算定积分的另一方法。代表 f(x)的不定积分的记号 $\int f(x)\,dx$ 应介绍如下： 若 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 成立，则称F(x)为f(x)的不定积分，且记为 $F(x) = \int f(x)\,dx$ 。 教师亦应指出 f(x)的不定积分不是唯一的及若 F(x)是 f(x)的一个不定积分，则 F(x)+c (其中 c 是一常数)是另一个，而以 $\int f(x)\,dx$ 作为 f(x)的原函数。 学生应能够运用下列公式求不定积分，事实上，教师可鼓励学生导出部分或全部公式。 (1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$，$n \neq -1$

内容	时间分配	教学建议
77		(2) $\int \frac{dx}{x} = \ell n(x) + c$ (3) $\int e^x\,dx = e^x + c$ (4) $\int a^x\,dx = a^x \ell n a + c$ (5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ (6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ (7) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$ (8) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ (9) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$ (10) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$ (11) $\int \tan x\,dx = \ell n\lvert\sec x\rvert + c$ (12) $\int \cot x\,dx = \ell n\lvert\sin x\rvert + c$ (13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$ (14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

表示删去的内容

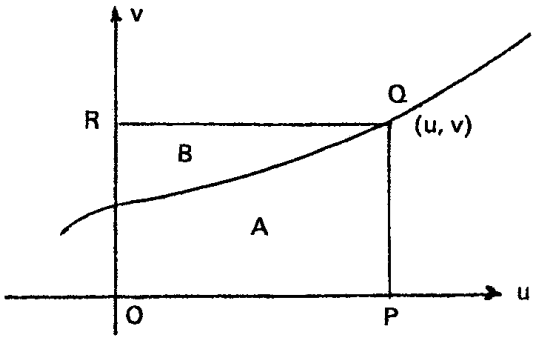
内容	时间分配	教学建议
		教师亦可提醒学生以下性质： (1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$，其中k是一常数 (2) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ 应鼓励学生对各样的不定积分做足够的练习。因此可测试他们已掌握了基本运算，而可以顺利学习其后的技巧。
5.6 求积分的方法 (A) 代换法	8	教授代换法时，对代换公式 $\int f(u)\,du = \int f[g(x)]\,g'(x)\,dx$ 无需作严谨的证明，但教师宜开始时先用简单和明显的例子如下： $\int \frac{dx}{x+1}$、$\int (x+1)^{10}\,dx$、$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$、$\int \sin^5 x\cos x\,dx$、$\int \frac{dx}{x\,\ell n\,x}$ 等。 在某些积分中，当$g'(x)$ 并不明显时，g(x)是要推测出来的，例如 $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$、$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ 等。 学生须透过大量有关的练习以发展这些技巧，以下是一些例子 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$ (2) $\int \frac{dx}{\cot x + \operatorname{cosec} x}$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ (设 $u = e^x$) (4) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (设 $u = e^x+1$)

78

内容	时间分配	教学建议
		(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 其中$b > a$（设 $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$） (6) $\int_0^1 \frac{\ell n\,(1+x)}{1+x^2}\,dx$ (设 $x = \tan\theta$) 教师亦应和学生讨论下列有用的结果，并举实例说明： (1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ 而其中 $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (2) 若 $f(x) = f(a-x)$，则 $\int_0^a xf(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ 而其中 $\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ (3) 若f(x) 是一周期w的周期函数，则 $\int_a^{a+w} f(x)\,dx = \int_0^w f(x)\,dx$ (4) 若f(x) 是一偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (5) 若f(x) 是一奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ 可考虑下列有关的例题： (1) $\int_0^\pi \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx$

79

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
80 (B) 分部积分法	3	(2) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ (3) 证明 $\int_0^a x^m(a-x)^n dx = \int_0^a x^n(a-x)^m dx$ 并由此计算 $\int_0^8 x^2\sqrt[3]{8-x}\,dx$ (4) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx$ (5) 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ 并由此计算此积分。 (6) 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \frac{\pi}{4}$ 分部积分的公式 $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$ 或 $\int udv = uv - \int vdu$ 可利用直观几何的方法来证明。 

内容	时间分配	教学建议
81		图中提供上述公式一个非形式化的几何解释： $\int vdu$ 代表区域 A 的面积； $\int udv$ 代表区域 B 的面积； uv 代表 OPQR 的面积而由此可得出上述公式。 应用具代表性的例题作说明时可包括 $\int xe^x dx$ 、$\int x\sin x dx$ 和 $\int \ell n\, x dx$ 。 学生混合使用代换法和分部积分的公式，就可以处理很多种类的积分，例如： (1) $\int e^{ax}\cos bx\, dx$ (2) $\int \tan^{-1} x\, \ell n\,(1+x^2)\, dx$ (3) $\int (\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})\, \ell n\, x\, dx$ (4) $\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ (5) $\int_0^1 x\tan^{-1} x\, dx$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x\sin x\, dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
(C) 归约公式	5	归约公式是用一组函数中较简单的函数的积分来表达函数组中任一函数的积分。归约公式通常是利用分部积分的方法求得。在三角函数的积分中此法被广泛利用。可考虑下列具代表性的例题： (1) 设 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ 可记为 I_n，证明 $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$，$n \geq 2$。由此计算 I_4 的值。 (2) 设 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$，求 I_n 的归约公式，然后计算 $\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$ 的值。 (3) 若 $I_n = \int x^n e^{x^2} dx$，证明对 $n > 2$，$I_n = \frac{1}{2} x^{n-1} e^{x^2} - \frac{1}{2}(n-1) I_{n-2}$。
(D) 利用部分分数计算积分	4	有理代数函数的积分是可先将数式分解成部分分数后完成，一般有四类分式： $\int \frac{L dx}{ax+b}$、$\int \frac{L dx}{(ax+b)^r}$、$\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)} dx$ 和 $\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)^r} dx$。 学生处理前三类的分式应没有特别的困难，但若遇到最后那类分式时，则须要应用归约公式了。 以下是一些可作讨论的例题： (1) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\,dx$ (2) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$ (3) 设 $I_n = \int \frac{dx}{(1-x^4)^n}$，证明当 $n \geq 1$，$4nI_{n+1} = (4n-1)I_n + \frac{x}{(1-x^4)^n}$ 并求 $\int \frac{x^8}{(1-x^4)^4} dx$ 的值。

82

内容	时间分配	教学建议
5.7 广义积分	4	应介绍广义积分的基本概念而学生预期可认识第一类广义积分，即 $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ 或 $2\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ 并可简单记为 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 或 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 及第二类广义积分，即 当 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^b f(x)\,dx$ 和 当 $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x)dx$ 属于第一类而具代表性的例子有： (1) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$ (2) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$ 教师宜提出 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ 作例题，但指明这不是一广义积分因其极限并不存在。 第二类广义积分的例题有 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 和 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$。 同样地，教师可用 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 作说明，这亦不是一广义积分因其极限亦不存在。
	~~45~~ 41	

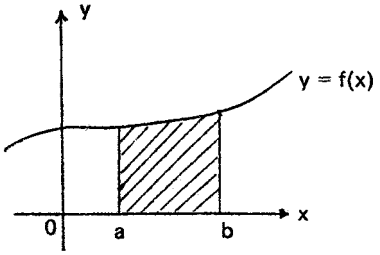
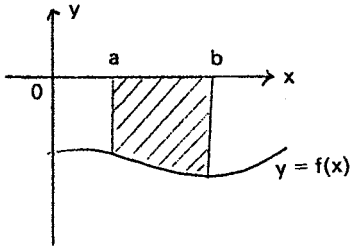
83

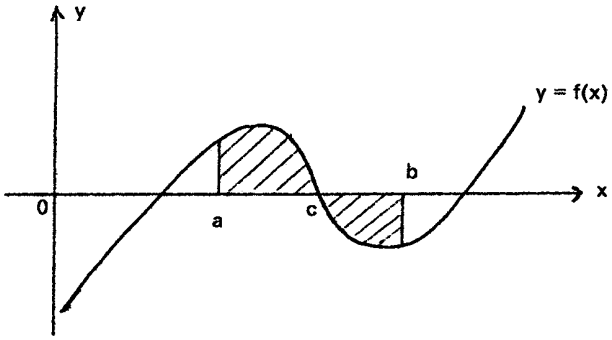
表示删去的内容

单元 B6：积分法的应用

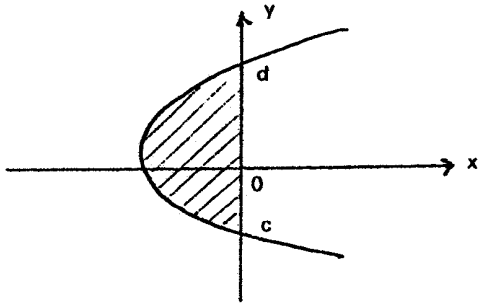
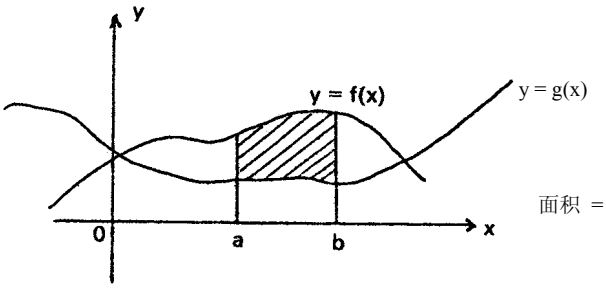
特定目标：

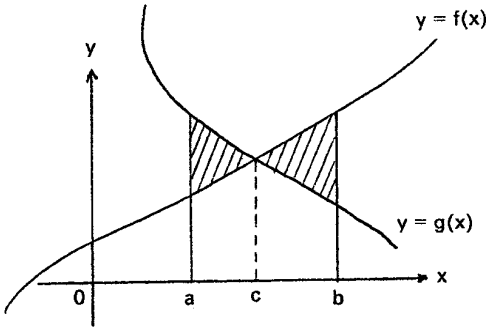
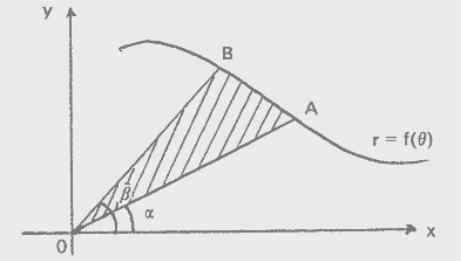
1. 学习应用定积分来计算平面面积、弧长、旋转体的体积及旋转曲面面积。
2. 应用定积分计算和的极限。

内容	时间分配	教学建议
6.1 平面面积	5	作为定积分定义的延续，由曲线 y = f(x)、垂直线 x = a、x = b 及 x－轴包围的面积可以根据有关函数的性质(即函数图像在 x－轴之上或之下)用下列方法计算出来。 情况(1)：当y = f(x)在区间[a，b]内连续及非负，则面积可以下式表示 $\int_a^b f(x)dx$  情况(2)：当 y=f(x)在区间[a，b]内连续及非正，则面积可以下式表示 $-\int_a^b f(x)dx$ 

内容	时间分配	教学建议
		情况(3)：当 y = f(x)在区间[a，b]内连续及取值时正时负，则可以下列简例的程序求其面积。  面积表示式为 $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ 。 教师宜提醒学生在计算图像在 x－轴之下的面积时应留意加入负号，并应鼓励学生先作函数草图以获得更清晰的了解。

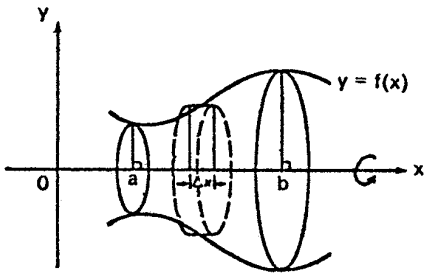
表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		教师也应就曲线图像与 y－轴所围成的面积的各个不同情况详加阐释， 下面是一个例子。  面积表示式为 $-\int_c^d x\,dy$ 。 至于由两条曲线所围成的面积的计算，教师可与学生详细讨论下列图示的方法及其变着，并应利用足够的例子加以说明。  面积 $= \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

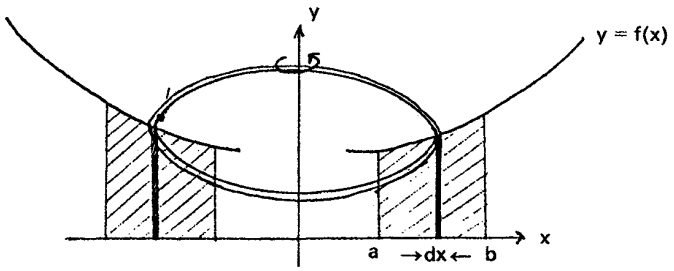
内容	时间分配	教学建议
		 面积= $\int_a^c [g(x)-f(x)]dx$ + $\int_c^b [f(x)-g(x)]dx$ 当曲线以极方程 $r = f(\theta)$ 表示，则曲线与两半径围成的面积为 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ 。 

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		当曲线以参数方程形式表示时，例如 $x = x(t)$；$y = y(t)$，则所围成的面积以下式表示 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$，其中A及B点的参数分别为$t_0$及$t_1$。 要令学生掌握计算面积的技巧，教师宜引入更多例子，包括不同方法及其变着，使学生有更深入的了解。下列例子可加入考虑： (1) 求抛物线$y^2 = 5-x$及直线$y = x+1$ 所围成的面积。（注：此面积可以对x或对y积分而求得，教师宜示范两个方法。） (2) 证明心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 所围成之面积为 $\frac{3a^2\pi}{2}$。 (3) 利用椭圆的参数方程 $x = a\cos\theta$; $y = b\sin\theta$, 证明椭圆的面积为πab。（注：教师宜指导学生利用图像的特别几何性质，例如对称性质，去简化计算过程。）
88 **6.2 弧长**	3	曲线 $y = f(x)$在两点 $x = a$ 及 $x = b$ 之间的弧长以 $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表示。 若曲线以参数形式$x = x(t)$；$y = y(t)$表示，则由$t = t_1$至$t = t_2$之间的弧长为 $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$。 若曲线以极形式 $r = r(\theta)$表示，则由 $\theta = \alpha$至 $\theta = \beta$之 间的弧长为 $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$。 教师可用下列建议的例子作说明或与学生讨论之用。 (1) 证明闭合曲线（星形线）$x = a\cos^3\theta$ ；$y = a\sin^3\theta$的周界为 6a。 (曲线图形的对称性可加利用) (2) 证明心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的周界长度为 4a。 (3) 求曲线$x^3 = 8y^2$ 由$x = 1$ 至$x = 3$ 的弧长。

内容	时间分配	教学建议
		(注：教师在选择曲线作示范用途时，宜留意与椭圆有关的例子，在可能范围内应与学生作简短的讨论，藉以扩阔他们对数学其它支派的认识。教师可参考下列方法，并作简单介绍： 对椭图 $x = a\sin\theta$； $y = b\cos\theta$，恒有 $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2(1-e^2\sin^2\theta)$， 其中 $e = \frac{b}{a}$ 为离心率。由短轴一末端起计之弧长 s 是 $a\int_0^\phi \sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta$。此积分不能以有限形式的初等函数表示，它是第二类的椭圆积分，并通常以 $E(e,\phi)$ 表示。 为了完整起见，教师可引入第一类椭图积分，即 $\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}$，它通常以 $F = (e,\phi)$ 表示。）
89 **6.3 旋转体的体积**	4	在教授旋转体的体积时，教师宜与学生讨论旋转体的形成及其意义，同时也应引入旋转轴这名词，好让学生能认识及分辨由某个曲线线段或面积沿着某一旋转轴旋转而成的旋转体，之后教师可教授下列两个常用计算旋转体的体积的方法： (1) 圆盘法 

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		教师宜向学生强调圆盘元素体积 ΔV 或 dV 的公式为 $dV=\pi y^2dx$ ，它代表图盘的体积。整个固体的体积为 $\pi\int_a^b y^2dx$ 。教师更可向学生介绍曲线沿 y－轴旋转所形成的体积是 $\pi\int_c^d x^2\,dy$ 。 (2) 外壳法  在这里，元素体积是 2πxydx 及整体体积为 $2\pi\int_a^b xydx$ 。 有些情形，旋转体的体积可能由曲线沿着 x－轴或 y－轴以外的线旋转或将两曲线围成的面积旋转所形成，所以教师宜利用例子将各种可能情况加以阐明，并推导下列公式供学生参考。 $\pi\int_a^b [[f(x)]^2-[g(x)]^2]\,dx$ 或 $\pi\int_c^d [[f(y)]^2-[g(y)]^2]\,dy$ 教师宜提供足够的例子作说明，下列例子可作参考。

内容	时间分配	教学建议
		(1) 证明由椭圆 $x=a\cos\theta$; $y=b\sin\theta$ 沿 x－轴旋转所形成的体积是 $\frac{4}{3}\pi ab^2$ 。 (注：教师可要求学生从结果引申出半径为 r 的圆球体体积。) (2) 求将曲线$y=x^3$、直线$x=2$ 及x－轴所围成的面积沿直线$x=2$ 旋转所形成的体积。 (注：教师可用圆盘法和外壳法两个方法解这问题。)
6.4 旋转体的表面面积	4	将曲线 y = f(x)上由 x = a 至 x = b 的弧沿 x－轴旋转所产生的表面面积是 $2\pi\int_a^b yds$ 其中 ds 是弧长的元素，该面积公式通常以 $2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表达。若同样的弧长沿 y－轴旋转，表面面积为 $2\pi\int_c^d xds$ 或 $2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$ 其中 c 及 d 分别为该弧末端的纵坐标。 若曲线以极形式表式并以θ为自变量，则面积为 $2\pi\int_\alpha^\beta y\frac{ds}{d\theta}d\theta$ 其中$y=r\sin\theta$及 $\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}$ 。同样地，若曲线以参数形式$x=x(t)$；$y=y(t)$表示，由$t=t_0$至$t=t_1$之曲线部分长度沿x—轴旋转所形成的表面面积是 $2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dx$ 。 教师可与学生讨论下列例子： (1) 证明抛物线由原点至(4，4)的弧长沿 x－轴旋转形成的表面面积为 $\frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$ 。 (2) 证明心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 沿始线旋转所产生的表面面积为 $\frac{32}{5}\pi a^2$ 。

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		(3) 证明旋轮线 $x = a(1-\sin\theta)$； $y = a(1-\cos\theta)$ 沿 x－轴旋转所形成的表面面积为 $\frac{64}{3}\pi a^2$ 。 (4) 证明星形线 $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ 沿 x－轴旋转所形成的表面面积为 $\frac{12}{5}\pi a^2$ 。
6.5 和的极限	4	这是一个应用定积分有趣的课题。教师宜利用一些简单但明显的例子如 $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}$ 作为引入，并提供适当的提示，使学生能发现合适的定积分、积分区间与恰当的分割，而最重要是能选取正确的被积函数，来表示无限级数的极限。对此例而言，被积函数为 $f(x) = x$ ，区间为$[0, 1]$ 而分割为 0，$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，$\frac{3}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}$，1。学生不难发现下列结果： $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$ $= \int_0^1 x\,dx$ $= \frac{1}{2}$ 教师可提供更多如下列之例子 (1) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}) = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ell n\ 2$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right) = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

内容	时间分配	教学建议
		(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}})$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}})$ $= \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(\sqrt{2}-1)$ 务求使学生获得更深入的了解及增进他们的运算技巧。下列是一个值得与学生讨论的例子： 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 。先将它转换为 $\ell n\ y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ell n(\frac{i}{n})$，其中 $y = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $= \int_0^1 \ell n\ x\,dx$ $= -1$ 故得 $y = e^{-1}$ (注：教师教授此部分时，可令学生参考单元 B5，使他们能与黎曼和作为和的极限联系起来。) 教师必须提醒学生并不是所有和的极限都可用此法解答，调和级数，$\sum\frac{1}{n}$，是其中一个例子。
	~~20~~ 13	

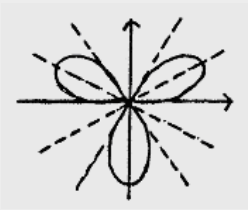
表示删去的内容

单元 B7：解析几何

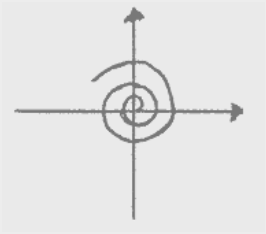
特定目标：

1. 学习除直角坐标外的另一种坐标系：极坐标。
2. 学习二次曲线。
3. 利用代数方法，学习解决轨迹问题。
4. 解决有关问题。

内容	时间分配	教学建议
7.1 基本解析几何知识	5	学生除了对中学数学解析几何内容有所认识外，学习此单元的其它课题应先掌握下列知识： (1) 外分点； (2) 直线图形的面积 $\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$； (3) 求两直线的交角时所用公式 $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$； (4) 直线的法线式； (5) 两直线之间的角平分线； (6) 直线族及 (7) 圆族。 学生应懂得极坐标系及直角坐标系之间的转换，并应掌握曲线方程在两个坐标系之间的转换方法。 由极坐标转为直角坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

内容	时间分配	教学建议
		由直角坐标转为极坐标：$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$，其中 $x \neq 0$，並且θ是由(x，y)所在的象限决定。
7.2 于极坐标系的曲线描绘	4	学生应懂得极坐标曲线方程的绘图，因为在「积分的应用」一课中需要对这种绘图法有基础认识，以下是一些学生应懂得绘画的简易极形式曲线方程： (1) 直线：$\theta=k$，其中 k 为一正常数； $r\cos\theta=a$ (垂直于 x – 轴的直线) (2) 圆：$r=k$，其中 k 为一正常数； $r=\sin\theta$ (3) 抛物线：$r=(1+\cos\theta)=k$，其中 k 为一常数 (4) 心脏线：$r=a(1-\cos\theta)$，其中 a 为一常数 (5) 玫瑰曲线：$r=a\sin 3\theta$ 

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
7.3 于直角坐标系的圆锥曲线	7	(6) 螺线： $r = \theta$  学生应可以分别各圆锥曲线的标准方程，包括： $y^2 = 4ax$ (抛物线) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (椭圆) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (双曲线) $xy = c^2$ (等轴双曲线) 其参数表达形式亦应加以学习，包括： $y = r\sin\theta$; $x = r\cos\theta$ (椭圆) $y = b\sin\theta$; $x = a\cos\theta$ (椭圆) $y = b\tan\theta$; $x = a\sec\theta$ (双曲线) $y = \frac{c}{t}$; $x = ct$ (等轴双曲线) $y = 2at$; $x = at^2$ (抛物线) 对双曲线的渐近线亦需要有所认识，而对圆锥曲线的其它性质例如离心率、焦点及准线等亦可教授但不需特别强调。

96

内容	时间分配	教学建议
7.4 圆锥曲线的切线及法线	6	学生应懂得运用不同方法去找出圆的切线。经过简单圆形$x^2 + y^2 = a^2$上一点 (x_1, y_1) 的切线方程为 $x_1x + y_1y = a^2$，其法线方程则为 $x_1y - y_1x = 0$。这些基本结果的导数亦可在此介绍以启发学生思考及计算如以下的例子以强调其基础方法： 计算经过圆形$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一点(x_1, y_1) 的切线方程， (i) 可利用切线与圆形半径的垂直关系； (ii) 设切线方程为 $y = mx+k$，利用联立方程 $\begin{cases} y = mx + k \\ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \end{cases}$ 有等根的关系。 并应注意到方法(ii)是可以应用于一点 (x_1, y_1) 不在圆形的情况上。在此可以得到经过圆形 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一点 (x_1, y_1) 的切线方程为$x_1x + y_1y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$。若将其结果普及，应可得到下列结果： (a) 经过抛物线$y^2 = 4ax$上一点(x_1, y_1)的切线方程为$y_1y = 2a(x + x_1)$ (b) 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点(x_1, y_1)的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ (c) 经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 上一点(x_1, y_1)的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ (d) 经过等轴双曲线$xy = c^2$上一点(x_1, y_1)的切线方程为$y_1x + x_1y = 2c^2$ 在找到切线方程后，学生应对法线方程问题上不会有任何因难的。 当二次曲线方程是以参数式表达时，其有关的结果亦应考虑。教师应引导学生找出下列结果： (a) 抛物线 $\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$ 的切线方程为 $y = \frac{x}{t} + at$ (b) 椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 的切线方程为 $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ (c) 双曲线 $\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ 的切线方程为 $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$

97

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		(d) 等轴双曲线 $\begin{cases} x = ct \\ y = \dfrac{c}{t} \end{cases}$ 的切线方程为 $x + t^2 y = 2ct$ 。 为了使到学生能理解基本概念，并能掌握和运用所学技巧，切点弦的基本概念亦应予以讨论。
7.5 于直角坐标系的轨迹问题	5	学生应对一组能够符合一系列的限制条件而又能利用直角坐标方程来表达的点的轨迹方程加以学习，例如： (1) 当一点与一固定点的距离不变，其移动的轨迹为一圆形。 (2) 当一点与一固定直线之间的距离相等，其移动的轨迹为一抛物线。 (3) 当圆形在一直在线滚动时，圆周上一点的轨迹为旋轮线。
7.6 平面曲线的切线及法线	4	当学习了微分学后，学生应可应用微分法去计算平面曲线在直角坐标系上的切线和法线方程。利用微分公式及链式法则，学生应可找出以隐函数式或参数式定义的曲线的切线和法线方程。教师应当在这课题上作出适当安排，因应学生的能力，将这个单元作为微分学的深入应用前的引例，或作为基本微分学应用的延续。
	~~31~~ 27	

表示删去的内容

这是空白页